ÖĞRENCİ FOTOKOPİ
VE TEZ MERKEZİ
Ali ALTUNÖZ
Üniv. Main Çatal Sok. No: 37/B
Tlf. (0 424) 238 79 92 ELAZIĞ
Hazar V.D. 067 03 6484

Bölüm 1

DENETİM SİSTEMLERİNE GİRİŞ

Temel Kavramlar ve Teoriler

Giriş

Denetim kelimesi genellikle dengelemek, yöneltmek yada komut vermek anlamında kullanılır. Bir sistemin bir girişi ve bir çıkışı olduğunu kabul edersek bu sistemin denetimi; sistemin çıkışının arzu edilen değerden sapması durumunda çıkışı düzeltmek amacıyla sistemin girişini uygun şekilde değiştirmek olarak söylenebilir. Sistemin girişinin arzu edildiği gibi değiştirilmesi, diğer bir ifade ile bir sistemin denetiminin insan unsuru olmaksızın gerçekleştirilmesi, *otomatik denetim* olarak söylenir. Uygulamada denetim veya denetim sistemi denilince daha çok otomatik denetim anlaşılır. Günümüz toplumlarının günlük yaşamlarında bile otomatik denetim sistemlerinin uygulamalarına sıkça karşılaşılmaktadır. Örneğin; ütü, fırın, bulaşık ve çamaşır makineleri gibi ev araçlarının yanı sıra robotlar, üretim tezgahları, ulaşım ve haberleşme araçları, uzay ve savunma sanayii v.s gibi birçok endüstriyel sistemde otomatik denetim sistemleri kullanılmaktadır.

1.1 Denetim Sistemi ve Bileşenleri

Denetim sistemleri; arzu edilen bir amacı gerçekleştirecek şekilde çeşitli elemanların yada birimlerin birbirleri ile uygun bir şekilde bağlanmasından oluşur. Arzu edilen amaç, genellikle denetlenen büyüklüğün sabit tutulmasını yada belirlenen bir yörüngeyi en az hata ile izlemesini sağlamayı ihtiva eder. Dolayısıyla bir denetim sistemi, çok sayıda elemandan yada birimden oluşabilir ve bu elemanların matematiksel işlevlerini temsil eden blokların giriş ve çıkışları amaca uygun olarak birbirlerine bağlanır. Elemanların bağlanması ile elde edilen şemalar, denetim sisteminin elemanlarının uyarı-tepki ilişkilerine göre sıralanmalarını, dolayısıyla bütün bir sistemin incelenmesini kolaylaştırır. Bu bölümde, şekil 1.1 de verilen örnek bir kapalı çevrim denetim sisteminin blok şeması üzerinde, denetim sistemini oluşturan elemanlar yada birimler ile denetim sisteminde işlenen sinyaller tanımlanmıştır.

1.1.1 Denetim Sistemini Oluşturan Birimler

Denetim sistemi, bir sistemi arzu edilen şekilde denetlemek ya da ayarlamak üzere bir araya getirilen donanımdır. Denetim sistemini oluşturan donanım, denetlenen sistem yada süreçle birlikte denetleyici, yükseltici ve algılayıcı olmak üzere 4 temel birimden oluşur.

ÖĞRENCİ FOTOKOPİ
VE TEZ MERKEZİ

Sistem ve Süreç

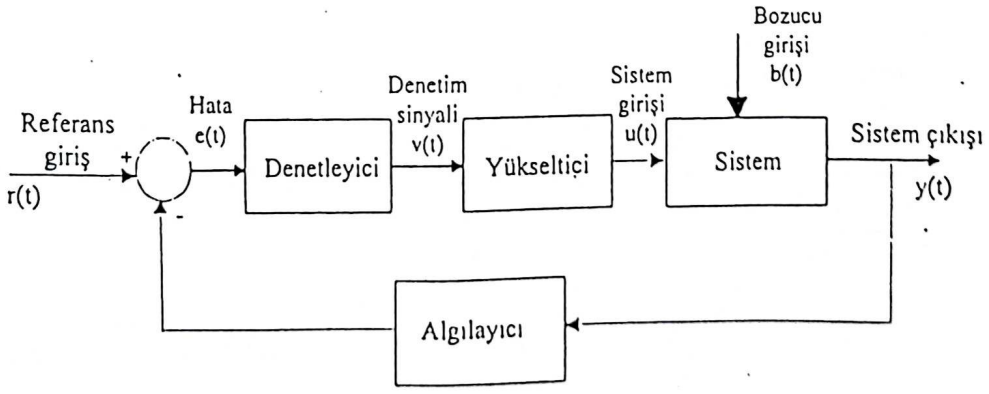
Sistem; bileşenlerinin tek başlarına yapamadığı belli bir işlevi yerine getirmek üzere birbiri ile ilgili yada bağlantılı parçaların bir araya getirilmesinden meydana gelen düzenek olarak tanımlanabilir. Denetim teorisinde denetlenecek düzenekler, farklı fiziksel yapıda da olsalar genellikle sistem olarak söylenir. Örneğin, bir elektrik motoru, ısıtma düzeneği, robot yada robot kolu vs. birer denetlenecek sistem olarak sayılabilir. Diğer taraftan denetim teorisinde süreç tanımı da yaygın olarak kullanılır. Belli bir sonuca yada amaca doğru sistematik olarak yönlendirilen hareketleri yada denetimli aksiyonlar serisini ihtiva eden sürekli operasyonlar süreç olarak söylenir. Örneğin kimyasal, ekonomik ve biyolojik süreçler gibi. Endüstriyel sistemler arasında, denetlenecek değişkeni basınç, akış, sıcaklık, PH gibi büyüklükler olan sistemler de genellikle süreç olarak söylenir.

Denetleyici (Denetim Birimi)

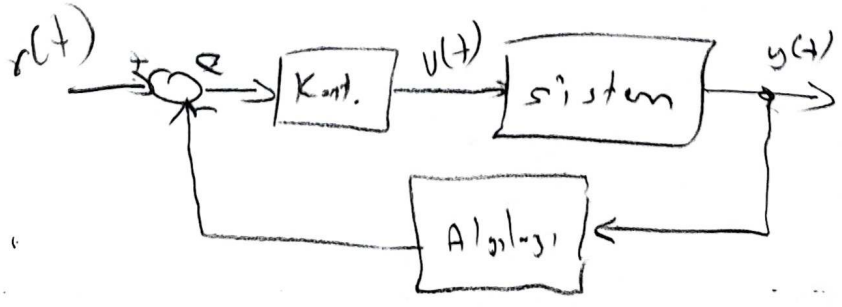
Denetlenen sistemin arzu edilen bir davranışı gösterebilmesi için gerekli olan denetim sinyalini (sistem giriş) sağlayan birimdir. Herhangi bir sistem için uygun denetleyicinin tasarımı, denetim sistemlerinin temelini teşkil eder. Denetleyiciler; mekanik, hidrolik, pünomatik gibi farklı fiziksel yapıda olabilmekle birlikte denetim algoritmalarının kolay ve ekonomik gerçekleştirilebilir olması nedeniyle genellikle elektronik devrelerle yada mikroişlemcili düzeneklerle tasarlanır.

Yükseltici-Dönüştürücü (Güç Birimi)

Denetlenen sistemin giriş sinyali, farklı türden fiziksel büyüklükler (elektriksel, mekaniksel, ısıl vs .) olabilir. Denetleyici çıkışı olan denetim sinyali ise genellikle zayıf güçlü elektriksel sinyaller olmakla birlikte farklı türden zayıf fiziksel sinyaller de olabilir. Güç birimleri, düşük güçlü denetim sinyalini yükselterek ve/veya dönüştürerek, denetlenen sistem için uygun ve yeterli bir giriş sinyali haline getiren birim olarak tanımlanabilir.



Şekil 1.1. Denetim sistemi ve bileşenleri



Algılayıcı (Geri Besleme Birimi)

Denetlenen sistemin gerçek çıkış sinyalini algılayan ve bu sinyali, referans giriş sinyali ile karşılaştırmak amacıyla uygun bir seviyeye ve/veya türe dönüştüren birimdir. Geri besleme birimi, kapalı çevrim denetim sistemleri için bir zorunluluktur. Esas olarak bir algılama ve ölçme devresi olan geri besleme birimi, özellikle denetlenen değişken ile referans giriş sinyalinin farklı fiziksel yapıda olduğu durumlarda bir transdüserden ibarettir.

1.1.2 Denetim Sisteminde Tanımlanan Sinyaller

Denetim sistemini oluşturan birimlerde çeşitli sinyaller işlenerek sonuçta sistem çıkışının, referans girişi en az hata ile izlemesi arzu edilir. Bir denetim sisteminde işlenen sinyaller aşağıdaki isimlerle tanımlanır.

Referans Giriş, r(t)

Denetlenen sistemden beklenen ideal davranışı temsil eden ve denetim sistemine uygulanan gerçek giriş sinyalidir. Referans giriş sinyali genellikle bir referans giriş birimi tarafından üretilir.

Hata yada Sapma, e(t)

Hata sinyali, referans giriş ile sistemin gerçek çıkışı arasındaki fark sinyaldir. Denetleyiciler, genellikle hata sinyalini kullanarak sistemden arzu edilen çıkışı alabilmek için gerekli olan sistem giriş sinyalini belirler.

Denetim Sinyali, v(t)

Denetim biriminin, hata sinyalinden yararlanarak belirli bir denetim algoritmasına göre belirlediği ve denetlenen sisteme uygulanan sinyal olarak tanımlanır. Denetim sinyalinin sistem giriş sinyaline göre zayıf güçlü ve / veya sistem giriş sinyalinden farklı fiziksel bir büyüklük olması durumunda denetim sinyali güç birimine uygulanarak güç biriminin çıkışı sisteme verilebilir.

Sistem Girişi, u(t)

Denetleyici çıkışından elde edilen denetim sinyalinin, genellikle bir yükseltici yada dönüştürücü ile yükseltilmesi ile elde edilen ve denetlenecek sistemden alınacak tepkiyi üretmek üzere sisteme uygulanan giriş sinyalidir. Yükseltici yada dönüştürücünün kullanılmadığı durumlarda denetim sinyali aynı zamanda sistem giriş sinyali olacaktır.

Sistem Çıkışı, y(t)

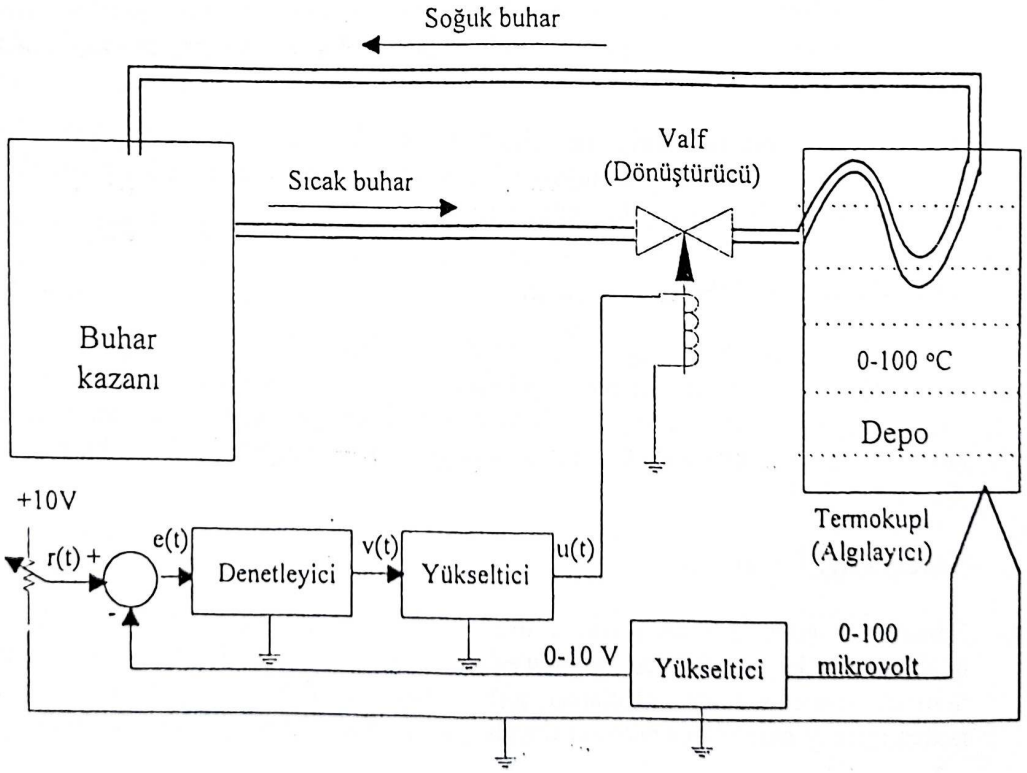
Sistemin girişine uygulanan sinyale, sistemin verdiği tepkidir. Bir sistemin çıkışı, arzu edilen tepkiye (referans girişe) uygun olabilir yada olmayabilir. Dolayısıyla sistem çıkışı, sistemin denetlenecek değişkeni olarak da söylenebilir.

Bozucu Giriş, b(t)

Sistem tarafından üretilen yada sistem dışından, sistemin çıkışını arzu edilmeyecek şekilde değiştiren sinyallerdir. Eğer bozucu etkiler sistemin kendi içinden meydana geliyorsa iç bozucular, sistem dışından geliyorsa dış bozucular adını alır. Bozucu girişler de sistem için birer beklenmedik giriş durumundadır. Bozucu giriş, denetim sistemi çevrimine herhangi bir noktadan etki edebilir.

Örnek 1.1

Şekil 1.2 de sıcak buhar ile ısıtılan bir ısıtma sisteminin sıcaklık denetimini gerçekleştiren sistemin yarı-açık blok şeması verilmiş ve yukarıda tanımlanan birimler ve sinyaller, denetim sistemi üzerinde gösterilmiştir. Denetim sisteminden beklenen davranış, depodaki suyun sıcaklığının belirli bir değerde sabit tutulması (örneğin 100 ^{0}C) yada zamana göre değişen bir sıcaklık değişimi olabilir. Dolayısıyla bu talep, referans girişi temsil edecektir.



Şekil 1.2 Sıcaklık denetim sisteminin blok şeması

Şekil 1.2 de, buhar kazanından gelen sıcak buhar ile depodaki sıvı ısıtılmakta ve soğuyan buhar, kazana dönerek ısıtılıp tekrar buharlaştırılmaktadır. Buna göre sistemin gerçek girişi sıcak buhardır ancak, valf yardımıyla sıcak buharın geçişi, elektriksel sinyalle ayarlanmaktadır. Termokupl, birleşim noktasındaki sıcaklığa göre küçük bir elektrik sinyali

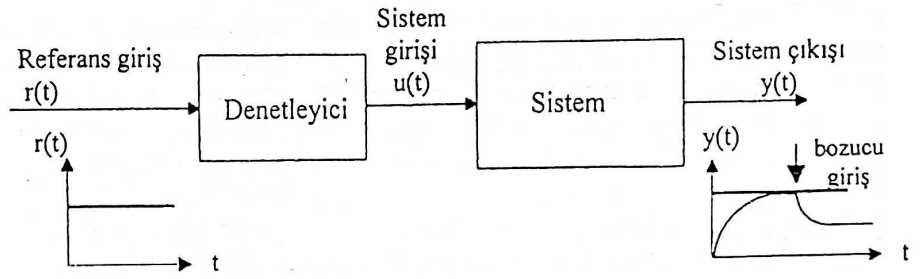
üreten bir sıcaklık algılayıcısıdır. Algılayıcı sinyali yükseltilerek referans giriş sinyaline (örneğin 0-10 volt) uygun bir seviyeye çıkarılıp referans sinyalle karşılaştırılmış ve aradaki hata sinyaline göre denetleyicinin belirleyeceği denetim sinyaline göre valfin otomatik olarak denetimi (dolayısıyla depodaki sıvı sıcaklığının denetimi) gerçekleştirilmiştir.

1.2 Denetim Sistemlerinin Sınıflandırılması

Denetim sistemleri; geri besleme yapılıp yapılmamasına, seçilen denetim yöntemine ve denetlenen sistemin türüne vs. göre değişik isimlerle söylenir. Bu bölümde, denetim literatüründe geçen temel kavramları anlamak için denetim sistemlerinin çeşitli türlerini açıklamak ve uygulamadan örnekler vermek yararlı olacaktır.

1.2.1 Açık Çevrim Denetim Sistemi

Denetleyicinin, sistemin çıkışından bağımsız olarak denetim sinyalini belirlediği ve genellikle denetleyicinin ön programlamalı olarak ayarlandığı denetim sistemleridir. Şekil 1.3 de görüldüğü gibi açık çevrim denetim sisteminde, sistemin gerçek çıkışının referans giriş (arzu edilen çıkış) ile karşılaştırması olmadığından bozucu girişlerin ve sistemdeki parametre değişimlerinin sistemin çıkışı üzerindeki olumsuz etkileri, denetleyici tarafından düzeltilemez.

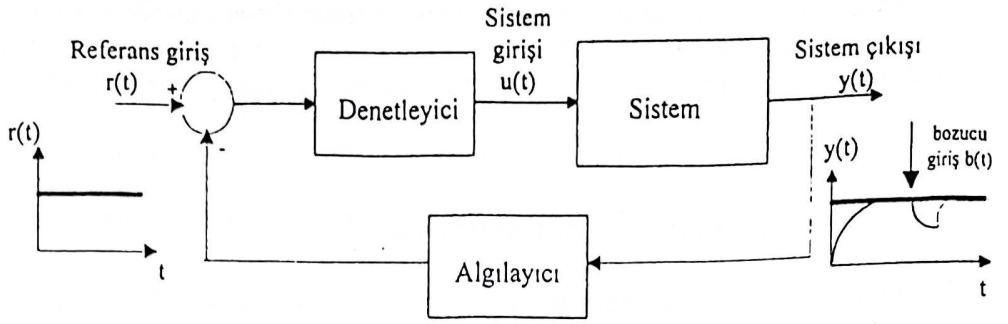


Şekil 1.3: Açık çevrim denetim sistemi

Açık çevrim denetim sistemlerinde denetleyici tasarımı, sistemin çalışma koşullarından elde edilen ve deneme yanılmaya dayalı bilgilerden yararlanarak denetleyicinin ayarlarının (genellikle zamanlayıcı ayarları) yapılmasından ibarettir. Örneğin, bulaşık/çamaşır makinaları, iç yapılarında kapalı çevrim denetim sistemlerini ihtiva etseler de dıştan bu makinalara amaçlarına uygun olarak bir bütün olarak bakıldığında açık çevrim denetim sistemlerinin tipik örnekleridir. Çünkü, bu makinaların denetim birimi, esas olarak bir zamanlayıcıdan ibarettir ve üretim sırasında zamanlayıcının programlanması yapılmıştır.

1.2.2 Kapalı Çevrim Denetim Sistemi

Sistemin gerçek çıkışının ölçülüp geri beslenerek referans giriş değeri ile karşılaştırıldığı ve hata sinyaline göre denetim algoritmasının gerçekleştirildiği denetim sistemidir. Dolayısıyla sistemin gerçek çıkışı, referans giriş değeri ile birlikte sistemin girişi üzerinde etkilidir. Şekil 1.3 den görüldüğü gibi kapalı çevrim denetim sistemlerinde, bozucu girişlerin ve parametre değişimlerinin sistemin çıkışı üzerindeki olumsuz etkileri düzeltilebilmektedir.



Şekil 1.4 Kapalı çevrim denetim sistemi

Açık çevrim ve kapalı çevrim denetim sistemleri arasındaki temel fark geri besleme etkisidir. Bu nedenle de bazen kapalı çevrim denetim sistemlerine geri beslemeli denetim sistemleri de denir. Geri besleme, negatif ve pozitif geri besleme olarak ikiye ayrılır. Negatif geri besleme, çıkışın girişi zayıflatıcı yönde, pozitif geri besleme ise çıkışın girişi kuvvetlendirici yönde etki ettiği sistem olarak tanımlanır ve Şekil 1.4 den görüldüğü gibi denetim sistemlerinde negatif geri besleme gereklidir. Şekil 1.2 de verilen sıcaklık denetim sistemi, kapalı çevrim denetim sistemi için bir örnek teşkil etmektedir.

1.2.3 Düzenleyici (Regülatör) ve İzleyici Denetim Sistemi

Referans girişin uzun bir zaman diliminde belli bir çalışma koşulu için, değişmez veya sabit tutulduğu geri beslemeli denetim sistemi düzenleyici denetim sistemi olarak söylenir. Düzenleyici denetim sistemlerinde, sisteme etki eden bozucu girişlere rağmen sistem çıkışının arzu edilen değerde sabit tutulması gerekir. Şekil 1.4 de verilen sinyal şekillerine göre bu sistemin bir düzenleyici denetim sistemi olduğu söylenebilir. İzleyici denetim sistemlerinde ise referans giriş sabit olmayıp zaman içerisinde sürekli değişebilir. Dolayısıyla izleyici denetim sistemlerinde, sistemin gerçek çıkışının değişen referans girişi sürekli olarak en az hata ile izleyecek şekilde denetleyicisi tasarlanmalıdır.

1.2.4 Servo Denetim Sistemi

Otomatik denetim sistemleri, bir aç-kapa ısı denetim sistemi kadar basit olabileceği gibi bir uzay aracı yada füze sistemini izleme sistemi kadar karmaşık olabilir. Bu nedenle, denetim sistemlerinin kapsamı genişledikçe denetim yöntemleri ve donanımları da daha karmaşık ve tatmin edici hale getirilmektedir. Bu açıdan, servo denetim sistemleri de otomatik denetim sistemlerinin özel bir uygulama alanı olup bilinen denetim sistemi teorisini kullanır. Servo denetim sistemleri, çıkışı fiziksel hareket yada konum (konum, hız yada ivme) olan geri beslemeli denetim sistemidir.

1.2.5 Süreç Denetim Sistemi

Süreç denetim sistemi, bir materyali fiziksel yada kimyasal olarak değiştirmek için gerekli işlemler olarak tanımlanır. Süreç denetimi, normal olarak endüstrideki ürünlerin işlenmesini yada üretimini ifade eder. Bu açıdan süreç denetimi kısaca, sistem çıkışı sıcaklık, basınç akış, seviye ve pH gibi değişkenler olan ve genellikle düzenleyici denetim türündeki geri beslemeli denetim sistemleridir.

1.2.6 Zamanla Değişen ve Zamanla Değişmeyen, Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Denetim Sistemi

Bu sınıflandırma, denetim sistemini oluşturan birimlerin matematiksel modellerine göre yapılan bir sınıflandırmadır. Bu derste, doğrusal ve zamanla değişmeyen denetim sistemlerinin analiz ve tasarımı incelenecektir ancak, diğer sistemler hakkında da genel bilgilerin verilmesi yararlı olacaktır. Denklem 1.1 de dört farklı sistem modeli diferansiyel denklemler düzeninde verilmiştir.

doğrusal zamanla değişmeyen

$$a_2.\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1.\frac{dy(t)}{dt}+a_0.y(t)=b_1.\frac{du(t)}{dt}+b_0.u(t) \qquad (a)$$

$$a_2(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1(t).\frac{dy(t)}{dt}+a_0(t).y(t)=b_1(t).\frac{du(t)}{dt}+b_0(t).u(t) \qquad (b)$$

doğrusal ve zamanla değişen

1.1

$$a_2.\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}^2+a_1.Sin[y(t)]+a_0.y(t).u(t)=b_0.e^{-u(t)} \qquad (c)$$

doğrusal olmayan ve zamanla değişmeyen

$$a_2(t).\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}^2+a_1.\frac{dy(t)}{dt}+a_0.Cos[y(t)]=b_0.y(t).u(t) \qquad (d)$$

doğrusal olmayan ve zamanla değişen

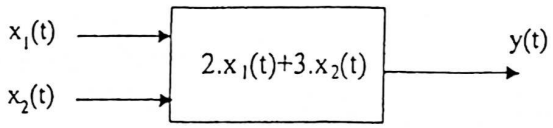
Denklem 1.1.a da verilen diferansiyel denklemde, sistemin parametreleri (katsayıları) sabit olup zamana bağımlı değildir ve ayrıca sistemin giriş-çıkış sinyalleri de yalın halde yani sadece bu sinyallerin kendileri ve birinci mertebeden türevleri bulunmaktadır. Sistemin giriş-çıkış sinyallerinin katlı türevleri, çarpımları, doğrusal olmayan bir fonksiyondan geçmiş halleri vs. bulunmadığından bu sistemlerin giriş-çıkış ilişkileri doğrusaldır. Dolayısıyla bu düzende bir diferansiyel denklem ile modellenen bir sistem doğrusal ve zamanla değişmeyen sistem olarak söylenir. Benzer şekilde diğer denklemler yorumlandığında, denklem 1.1.b de verilen sistemin doğrusal ve zamanla değişen bir sistem olduğu, denklem 1.1.c de verilen sistemin doğrusal olmayan ve zamanla değişmeyen bir sistem olduğu, denklem 1.1.d de verilen sistemin ise doğrusal olmayan ve zamanla değişen bir sistem olduğu anlaşılmaktadır.

1.2.7 Sürekli Zaman ve Ayrık Zaman Denetim Sistemi

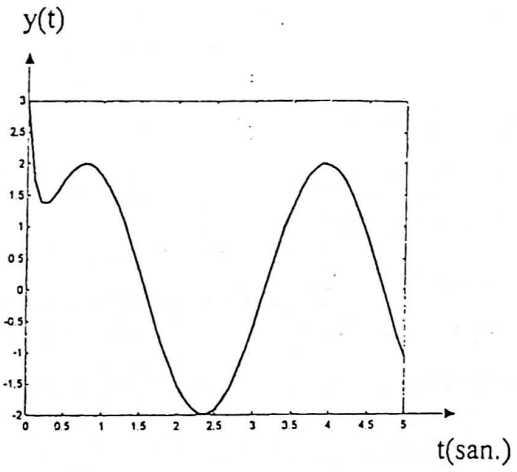
Sürekli zaman yada ayrık zaman denetim sistemi sınıflandırması, denetim sisteminde işlenen sinyal türlerine göre bir sınıflandırmadır. Sinyaller, genel olarak sürekli zaman ve ayrık zaman sinyalleri olmak üzere ikiye ayrılır. Sürekli zaman sinyallerinde zaman değişkeni t, ayrık zaman sinyallerinde ise zaman değişkeni genellikle k ile (bazen n ile) gösterilir. Denklem 1.2 de, doğrusal-zamanla değişmeyen statik bir sistemin (bobin ve kondansatör gibi enerji depo eden elemanı bulunmayan) sürekli zamandaki matematiksel modeli verilmiştir.

$$y(t) = 2.x_1(t) + 3.x_2(t) \qquad 1.2$$

Burada, y(t)- sürekli zamanda sistem çıkışı, x1(t) ve x2(t)- sürekli zamanda sistem girişleridir. Bu sistemin, örnek olarak x1(t)= Sin(2.t) ve x2(t)= $e^{-8.t}$ girişleri için çıkış tepkisi, denklem 1.2 kullanılarak Şekil 1.5 daki gibi kolayca belirlenebilir.



(a)



(b)

Şekil 1.5 Sürekli zaman sistemlerin ve sinyallerin gösterilişi

Örneğin t=0.15 inci saniyedeki çıkış değeri için y(0.15) = 2.Sin(2.0,15) + 3.$e^{-8.0,15}$ = ... elde edilecektir. Dolayısıyla rastgele bir t değeri için gerek giriş gerekse çıkış sinyallerinin değerlerini belirlemek mümkündür.

Bu sistemi ayrık zamanda incelemek (örneğin bilgisayar ortamında) gerekirse sistemin ayrık zamana dönüştürülmesi gerekir. Dinamik sistemlerin ayrık zamana dönüşümü için çeşitli yöntemler olmakla birlikte statik sistemler için sürekli zamandan ayrık zamana dönüşüm, t= k.T zaman dönüşümü ile gerçekleştirilebilir. Burada T- örnekleme peryodu, k=0,1,2,.... N ayrık zaman değişkenidir. Buna göre denklem 1.2 ve giriş sinyalleri, ayrık zamanda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(k.T) = 2.x_1(k.T) + 3.x_2(k.T) \qquad 1.3.a$$

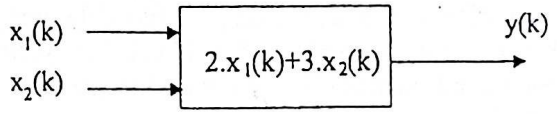
$$x_1(k.T) = Sin(2.k.T)$$
$$x_2(k.T) = e^{-8.k.T} \qquad 1.3.b$$

Burada, y(k.T) , x_1(k.T) ve x_2(k.T); sıra ile çıkış ve giriş sinyallerinin sembolik isimleridir. Bu sinyallerin gerçek değerleri, eşitliklerin sağ tarafında tanımlanmıştır. Sinyallerin sembolik isimlerindeki T değerlerinin, sinyallerin hangi örnekleme peryodu ile örneklendiğini ifade etmekten başka bir anlamı yoktur. Bu nedenle, sinyallerin isimlerindeki T değerleri kullanılmayabilir. Buna göre Denklem 1.3, aşağıdaki gibi daha sade olarak yazılabilir.

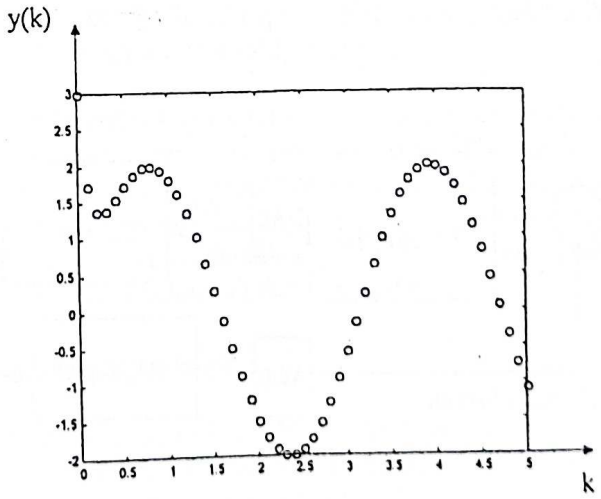
$$y(k) = 2.x_1(k) + 3.x_2(k) \qquad 1.4.a$$

$$x_1(k) = Sin(2.k.T)$$
$$x_2(k) = e^{-8.k.T} \qquad 1.4.b$$

Bu durumda, denklem 1.4 e göre T örnekleme peryodu ile örneklenmiş ayrık zamandaki bir sistemin modeli ve sinyalleri aşağıdaki gibi çizilebilir.



(a)



(b)

Şekil 1.6 Ayrık zaman sistemlerin ve sinyallerin gösterilişi

Örneğin T=0.1 saniye olarak seçilirse k=0,1,2,... değerleri için sürekli zaman sinyallerinin ancak t=k.T=0, 0.1, 0.2,..... inci saniyedeki ayrık değerleri ile sistem incelenmek durumunda olacaktır.

Denklem 1.5 de, birinci dereceden doğrusal ve zamanla değişmeyen bir dinamik sistemin sürekli zamandaki modeli görülmektedir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2.y(t) = 4.x(t) \qquad 1.5$$

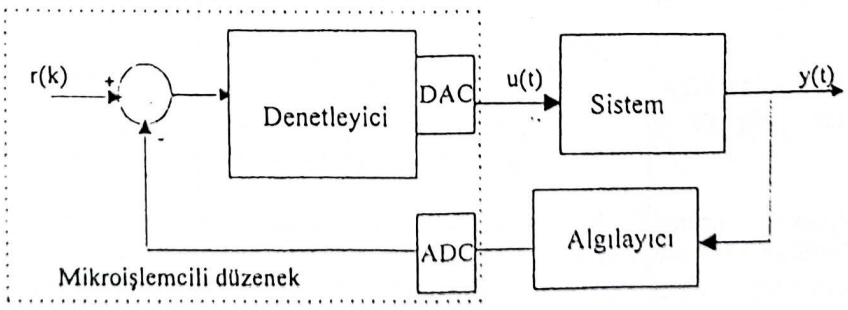
Dinamik sistemlerin ayrık zamana dönüşümü, farklı yöntemlerle yapılabilmekle birlikte burada, türevler yerine denklem 1.6.a da verilen geri farklar karşılığı yazılarak denklem 1.6.b deki gibi sistemin ayrık zaman eşdeğeri elde edilir.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T} \qquad 1.6.a$$

$$y(k) = a.y(k-1) + b.x(k) \qquad 1.6.b$$

Burada a ve b- sürekli zaman sistemin katsayılarına ve örnekleme peryoduna bağlı sabit katsayılardır. Sonuç olarak denklem 1.6.b, bilgisayarla gerçekleştirilmesi uygun bir düzendedir ve bir denetim sisteminin her hangi bir yerinde ayrık zaman birimi kullanılıyorsa (örneğin mikroişlemcili bir düzenekle denetim yapılıyorsa) bu sistemin bütünün ayrık zamanda incelenmesi gerekir.

Bu açıklamalara göre kısaca, mikroişlemcili bir düzenekle denetlenen sistemler ayrık zaman denetim sistemleri olarak söylenir ve bu sistemlerin analiz ve tasarımında ayrık zaman teorisinden yararlanılır. Şekil 1.7 de bir ayrık zaman denetim sisteminin blok şeması verilmiştir.



Şekil 1.7 Ayrık zaman denetim sisteminin blok şeması

1.2.8 Optimum Denetim Sistemi

Geleneksel denetim yöntemleri (P-I-D denetim ve kompanzatörler vs.) doğrusal- zamanla değişmeyen ve tek girişli tek çıkışlı sistemlerle ilgilenir ve temel amacı, öncelikle kararlı olmak kaydıyla sistemin geçici ve sürekli rejim davranışlarını istenen kriterleri sağlayacak şekilde düzeltmek ve sistemdeki parametre değişimleri ve belirsizliklere karşı sistemin dayanıklılığını sağlamaktır. Yüksek dereceli sistemler, çok girişli ve çok çıkışlı sistemler vs. için geleneksel yöntemlerle arzu edilen kriterleri sağlayacak şekilde denetim sistemi tasarlamak oldukça zorlaşmaktadır. Bu nedenle, modern denetim yöntemleri olarak söylenen geleneksel denetim yöntemlerine göre daha iyi ve kolay bir denetim sağlayabilen yöntemler geliştirilmiştir. Optimum denetim yöntemi, modern denetimin özel bir dalıdır ve optimum yöntemle tasarlanmış bir denetim sistemi kararlı ve arzu edilen geçici ve sürekli rejim denetim kriterlerini sağlamanın yanı sıra mümkün olan en iyi sonucun da verecektir.

1.2.9 Uyarlamalı Denetim Sistemi

Geleneksel denetim sistemlerinin (P-I-D, kompanzatörler) ve optimum denetim sistemlerinin tasarımında, sistemin doğru bir matematiksel modeline ihtiyaç duyulur. Zamanla değişmeyen ve parametreleri bilinen doğrusal sistemlerin matematiksel modelini çıkarmak ve denetim algoritmalarını geliştirmek doğrusal sistem teorisine göre günümüzde sorun olmaktan çıkmıştır. Ancak, ileri denetim sistemleri tasarımında en önemli sorun, sistemlerin karmaşıklığı arttıkça aşağıdaki nedenlerle doğru bir matematiksel modelinin elde edilememesidir.

- Sistemler zamanla değişen ve doğrusal olmayan dinamik davranışlar gösterebilir.
- Büyük ve belirlenemeyen bozucu girişlerden etkilenebilir.
- Bilinmeyen nedensel ilişkilere, ölçmesi güç ya da gerçek zamanda hesaplanması güç ve pahalı olan değişkenlere sahip olabilir.

Matematiksel modeli elde edilemeyen sistemlerin denetimi amacıyla uyarlamalı denetim yöntemleri sistem denetiminde önemli bir aşama olmuştur. Uyarlamalı denetim sistemleri için farklı tanımlar yapılmakla birlikte mümkün olan en iyi kriterleri sağlayacak şekilde *parametrelerini ayarlayabilme yeteneğini taşıyan sistemler* uyarlamalı denetim sistemleri olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla uyarlamalı denetim sistemlerinin tanımlama, karar verme ve düzeltme gibi üç temel ilkesi bulunmak durumundadır.

1.2.10 Öğrenmeli Denetim Sistemi

Karmaşık, belirlenemeyen dinamikleri olan, modellenemeyen ve doğrusal olmayan sistemler endüstride yerini aldıkça bu sistemlerin davranışlarını ve dinamik yeteneklerini iyileştiren ileri denetim yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Doğrusal olmayan sistemlerdeki belirsizlikleri ve dinamik davranışlarındaki değişiklikleri tanılamak için öğrenmeli denetim yöntemleri en etkin yöntem olarak görülmüş ve son on yılda bu alandaki çalışmalar yoğunlaşmıştır.

Öğrenmeli denetimin temel ilkesi; insanın yaratıcı, birleştirici ve uyarlamalı davranışlarını benzeştirebilecek sistemler geliştirmektir. Öğrenmeli denetleyicilerin, sistemdeki ve ortamdaki belirsizlikler altında yeterince iyi ve sistemdeki değişikliklere ya da yeni bilgilere uyarlanabilecek şekilde işlevini yerine getirmesi gerekir. Öğrenmeli denetleyiciler,

- zamanla değişen ve iyi tanımlanmamış ortamlarda çalışan,
- çevresel ve sistem dinamiklerindeki değişimlere kendini uyarlayan ,
- bilgileri kararlı bir yöntemle öğrenen,
- sistemin dinamikleri üzerine çok az kısıtlama getiren algoritmalara ihtiyaç duyar.

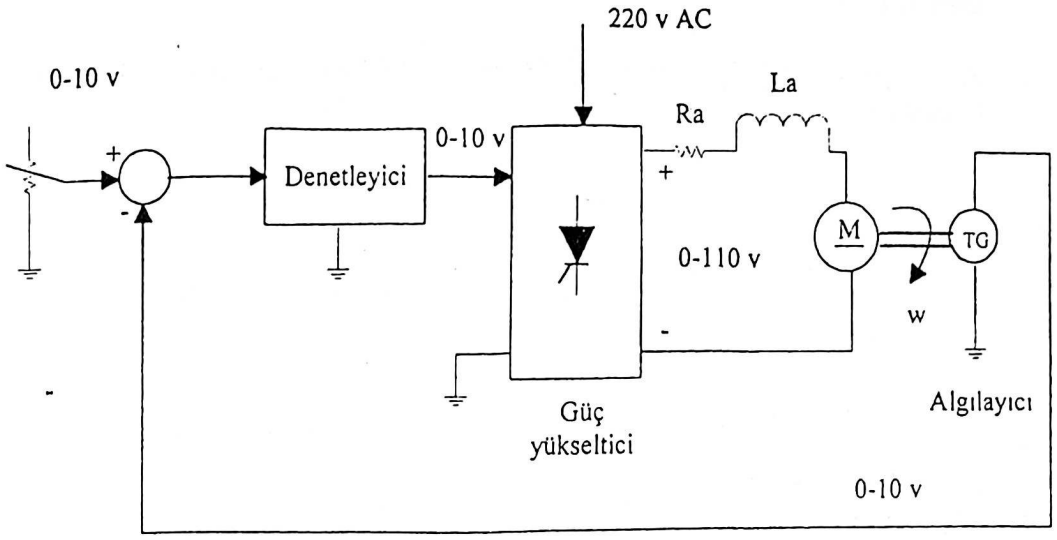
Son yıllarda uzman sistemler ve bulanık mantık gibi akıllı denetim yöntemlerinin yanı sıra doğal yapısı gereği öğrenmeli bir sistem olan yapay sinir ağları, doğrusal olmayan sistemlerin tanılanması ve denetiminde yoğun ilgi görmüş ve çeşitli endüstriyel sistemlerin denetimi alanına uygulanmıştır.

Örnek 1.2 :

Günlük yaşantımızda ve endüstriyel alanda çok sayıda denetim sistemi örnekleri ile karşılaşmak mümkündür. Günlük yaşantımızda ütü, buzdolabı, ısıtma sistemleri, bulaşık/çamaşır makinaları vs. ve endüstriyel alanda süreç ve imalat endüstrilerinde kullanılan sıcaklık, basınç, akış, pH, konum, hız vs. denetim sistemleri sıkça karşılaşılan denetim sistemi örnekleridir.

Endüstride kullanılan denetim sistemlerinin çok büyük bir çoğunluğunu kapalı çevrim geri beslemeli denetim sistemleri teşkil eder. Açık çevrim denetim sistemi uygulamalarının sayısı ise oldukça sınırlıdır. Çamaşır/bulaşık makinalarının yanı sıra, trafik akışını düzenleyen trafik lambalarının denetimi ve imalat endüstrilerinde kullanılan sıralı denetim sistemleri vs. açık çevrim denetim sistemlerine örnek olarak verilebilir.

Şekil 1.8. de, bir doğru akım motorunun hız denetimini gerçekleştiren kapalı çevrim denetim sisteminin blok şeması verilmiştir.

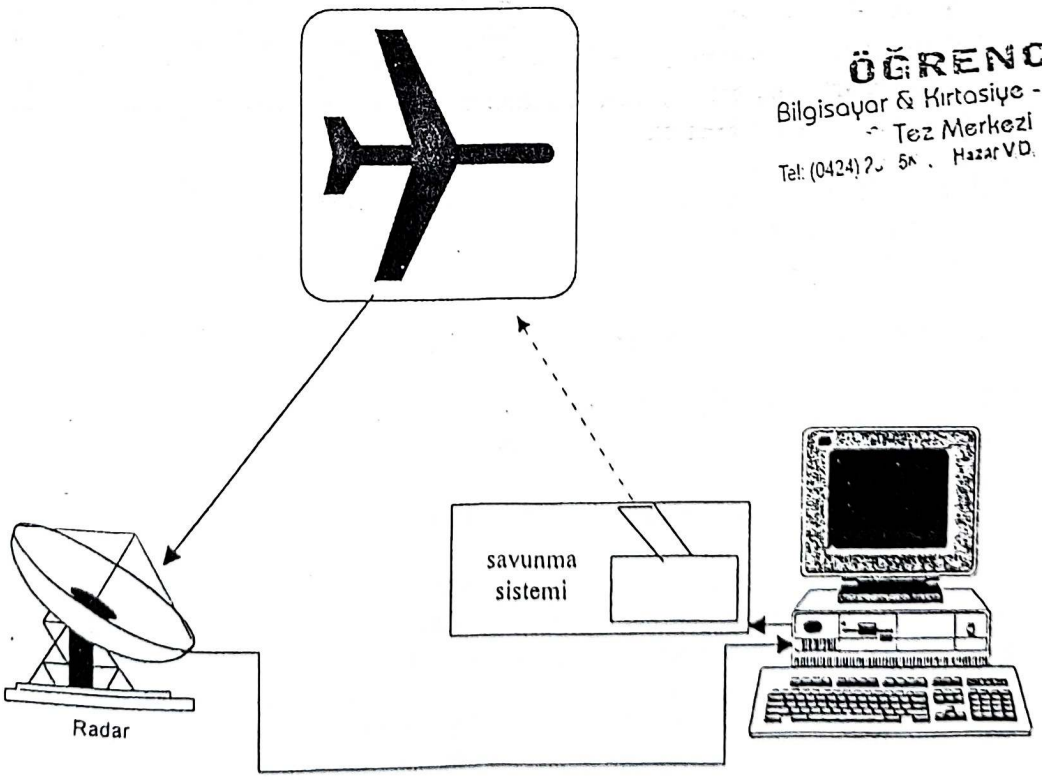


Şekil 1.8 Bir doğru akım motorunun hız denetimi blok şeması

Örnek 1.3

Şekilde, radar yardımı ile bir uçağın yolunun algılanarak (denetim sistemi için referans yol) bilgisayarlı denetim sistemi ile savunma düzeneğinin uçağa yönlendirilmesi görülmektedir.

ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) 2.. 5A . Hazar V.D. 253 014 9817



Şekil 1.9 Otomatik bir uçaksavar savunma sistemi

Örnek 1.4 :

Araştırıp incelediğiniz bir denetim sisteminin blok şemasını çizerek sistemin çalışmasını kısaca açıklayınız.

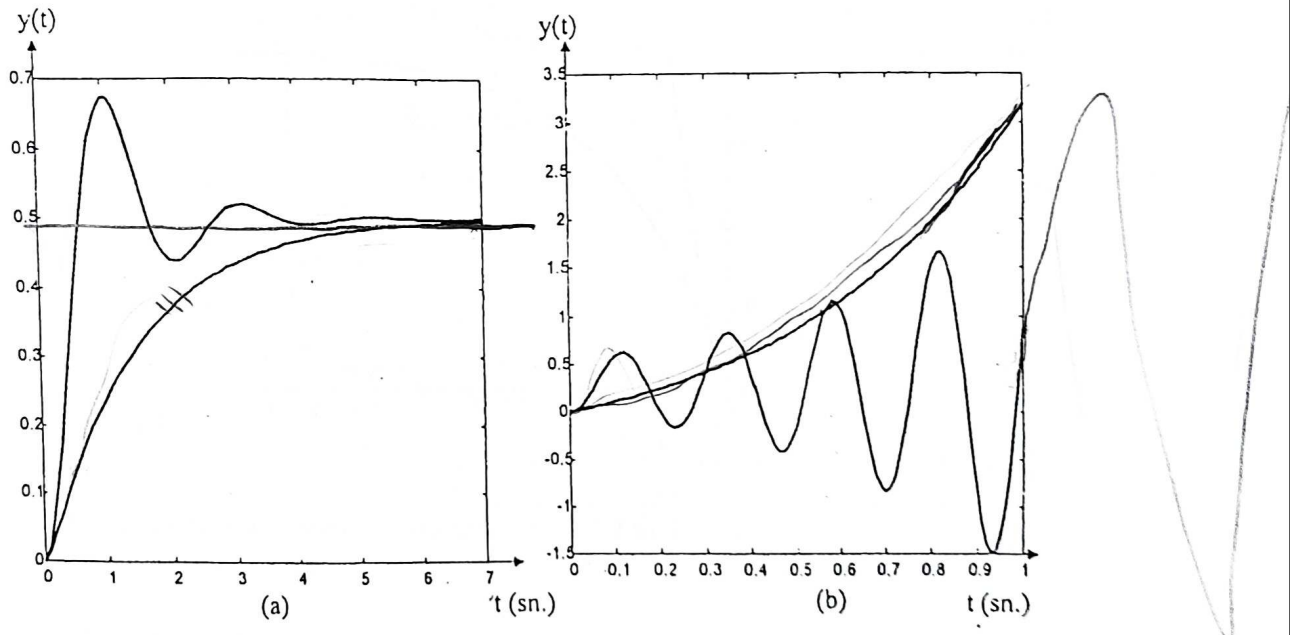
Şekil 1.10

1.3 Denetim Sistemlerinin Tasarım Kriterleri

Hangi sınıfa ait olursa olsun bir denetim sisteminin temel görevi, sistemin gerçek çıkışının arzu edilen değerlerde olmasını sağlamaktır. Sistemin arzu edilen çıkış değeri, referans giriş değeridir ve referans giriş değeri değiştiğinde sistem gerçek çıkışının da bu yeni referans değerini en kısa sürede alması gerekir. Genel ifadelerle açıklanan bu amaçlar denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında aşağıda tanımlanan denetim kriterleri ile açıklanır. Bu kriterler, ilerleyen bölümlerde ayrıntılı olarak incelenecektir ancak, bu kısımda bu kriterlerle ilgili genel bilgilerin verilmesi yararlı görülmüştür.

1.3.1 Kararlılık

Bu kısımda önemli bir denetim kriteri olan kararlılığın tanımı ve önemi üzerinde kısaca durulacaktır. Tanım olarak karalılık, sistemin sınırlı bir giriş değerine karşılık sınırlı bir çıkış değeri üretmesi olarak ifade edilir. Bu tanıma göre, Şekil 1.11.a da sabit bir basamak giriş sinyaline iki farklı sistemin verdiği cevapların sonuçta sabitleştiği, dolayısıyla bu sistemlerin kararlı olduğu söylenebilir. Benzer şekilde Şekil 1.11.b de ise sabit bir basamak girişe iki farklı sistemin verdiği cevapların sonuçta sınırlı kalmadığı ve sonsuza gittiği, dolayısıyla bu sistemlerin kararsız olduğu söylenebilir.

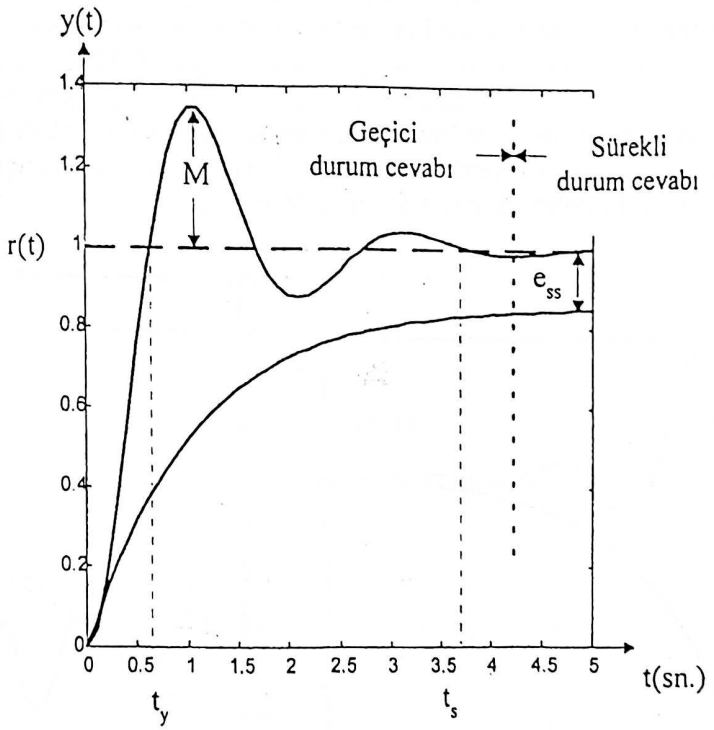


Şekil 1.11 Kararlı ve kararsız sistemlerin basamak davranışları

Bir denetim kriteri olarak kararlılık, sağlanması gereken ilk ve en önemli kriterdir. Kararsız bir sistemin pratik olarak bir anlamı ve yararı yoktur. Ancak, bazen bir denetim sistemi tasarlanırken kararsızlık sorunu ile karşılaşılabilir yada bir sistem doğal yağısı gereği kararsız bir davranış gösterebilir. Örneğin, günlük yaşantımızda yada endüstride karşılaştığımız birçok sistem gibi bir elektrikli ısıtıcı, belirli bir giriş gerilimi için belirli bir ısı verir ve doğal olarak kararlıdır. Ancak, bir seri doğru akım motor boşta çalıştırılırsa kararsız bir davranış gösterebilir.

1.3.2 Geçici Rejim Kriterleri (cevap hızı, aşma vs.)

Dinamik sistemler, enerji depolayan elemanlar ihtiva ettiğinden sistem, girişine ani olarak tepki gösteremez yani, sistemin çıkışı girişini anında izleyemez. Dolayısıyla dinamik sistemlerin çıkışları, kalıcı duruma ulaşmadan önce bir geçici durum davranışı gösterecektir. Şekil 1.12 de, iki farklı sistemin birim basamak giriş için geçici ve sürekli durum davranışları ile bu davranışlar sürecinde tanımlanan birkaç önemli kriter gösterilmiştir. Burada yükselme zamanı olarak da söylenen ve sistemin cevap hızını veren t_y zamanı ile aşma olarak söylenen M değeri ve sistemin sürekli durum cevap bandına girdiği süre olan ts yerleşme zamanı, sistemin geçici durumdaki davranışlarını tanımlayan en önemli kriterlerdir.



Şekil 1.12 Geçici ve sürekli rejim denetim kriterleri

1.3.3 Sürekli Rejim Kriteri (Sürekli rejim hatası)

Sistemin, sürekli durum davranışını tanımlayan ve sürekli durumdaki sistemin gerçek çıkışı ile referans giriş arasındaki hatayı veren kriter ise sürekli rejim hatası olarak bilinir ve Şekil 1.12 de e_{ss} ile gösterilmiştir. Şekil 1.12 de, salınımlı olarak değişen cevap eğrisinde sürekli rejim hatasının olmadığı ancak, üstel olarak değişen cevap eğrisinde e_{ss} değerinde bir sürekli rejim hatasının olduğu görülmektedir. İyi bir denetim sisteminde sürekli durum hartasının olmaması istenir. Ancak her zaman sıfır hata mümkün olmayabilir ve pratikte genellikle bir tolerans bandı vardır. Bir denetim sisteminin sürekli rejim hatası, sistemin duyarlılık tanımı ile ilgilidir ve hata sıfırsa sistemin duyarlılığı yüksektir denir.

1.3.4 Dayanıklılık

Denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında, yukarıda verilen denetim kriterlerine ek olarak denetim sisteminin dayanıklılığı da oldukça önemli bir kriterdir. Dayanıklılık, denetim sisteminin sistemdeki parametre değişimleri ve bozucu girişlerden etkilenmesi olarak tanımlanabilir.

1.4 Matematiksel Temeller

Denetim sistemleri; elektromekanik, hidrolik, pnömatik ve elektronik...v.s. çok farklı fiziksel yapıdaki birimlerden meydana gelebilir. Denetim sistemi ve karakteristikleri incelenirken bu parçaların fiziksel yapıları yerine matematiksel modelleri ve birbiriyle ilişkileri şematik olarak gösterilerek bütün olarak sistem incelenmek durumundadır.

Sistemlerin matematiksel modelleri, diferansiyel denklemler, transfer fonksiyonları ya da durum denklemleri düzenindedir. Bu nedenle, denetim sistemlerinin analizine başlamadan önce doğrusal sistem teorisi ve laplace dönüşümü ile ilgili gerekli bilgilerin edinilmesi gerekir. Bu bilgiler, çeşitli kaynaklarda yeterince bulunabildiğinden ve denetim sistemleri derslerinden önce öğrenciler tarafından edinilmiş olacağından konunun akışını bozmamak amacıyla burada tekrarlanmamış ancak EK-A da verilmiştir.

(EK-A ya bakınız.)

1.5 Transfer Fonksiyonu

Denetim sistemini oluşturan birimlerin matematiksel modelleri, zaman bölgesinde diferansiyel denklemler ya da durum denklemleri ile tanımlanır. Özellikle diferansiyel denklemlerin zaman bölgesinde incelenmesi zor ve karmaşık olduğundan genellikle Laplace dönüşümleri kullanılarak karmaşık s düzleminde cebirsel denklemler elde edilir. Transfer fonksiyonları, denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında yaygın olarak kullanılan ve s- bölgesinde tanımlanan cebirsel denklemlerdir. Transfer fonksiyonları doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemlerin giriş-çıkış bağıntılarını karakterize etmek için kullanılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Transfer fonksiyonu;

Bir doğrusal sistemin transfer fonksiyonu tüm başlangıç koşulları sıfır alınmak koşulu ile s- bölgesinde sistem çıkışının sistem girişine oranıdır.

Aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanan doğrusal bir sistemi ele alalım;

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^m} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_0 u(t) \qquad m \le n$$

Burada y(t) sistemin çıkışı ve u(t) ise sistemin girişini göstermektedir. Bu sistemin transfer fonksiyonunu, sıfır başlangıç koşulları altında denklem 1.7 nin her iki tarafının laplace dönüşümü alındıktan sonra sistem çıkışının girişine oranlanması ile elde edilir. Buna göre,

$$Transferfonksiyonu = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0} \qquad m \le n \qquad 1.8$$

olarak sistemin transfer fonksiyonu elde edilir.

1.5.1 Transfer Fonksiyonunun Temel Özellikleri

a) Transfer fonksiyonu sistem parametreleri cinsinden bir doğrusal sistemin çıkış ve girişini oranlayan bir ifade ve sistemin karakteristiklerini veren bir modeldir. Dolayısıyla sisteme uygulanan giriş fonksiyonundan bağımsızdır. Transfer fonksiyonu sistemin çıkışını girişine oranlamak için gerekli birimleri içerir. Fakat sistemin fiziksel yapısı ile ilgili hiçbir bilgi taşımaz. Bu nedenle farklı fiziksel yapılara sahip pek çok fiziksel sistemin transfer fonksiyonları birbirlerinin aynı olabilir.

b) Transfer fonksiyonu bilinen bir sistemin herhangi bir giriş için cevabı kolayca belirlenebilir. Transfer fonksiyonunun tanımından, $Y(s) = G(s).U(s)$ olacaktır. Ayrıca, bir sistemin transfer fonksiyonu, o sistemin ani darbe cevabının laplace dönüşümüdür. Buna göre, eğer transfer fonksiyonu G(s) olan bir sisteme ani darbe giriş fonksiyonu uygulanırsa çıkış fonksiyonu G(s)' eşit olacaktır.

$$Y(s) = G(s).U(s) = G(s).1 = G(s)$$

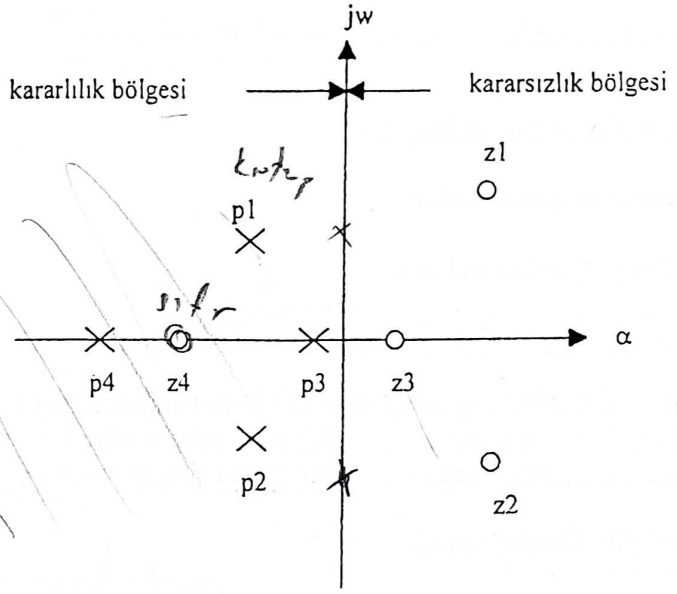
c) Bir sistemin transfer fonksiyonunda "s" değişkeni yerine D = d / dt ile tanımlanan diferansiyel operatörünü koymak suretiyle sistemin diferansiyel denklemi elde edilebilir. Örneğin, denklem 1.8 de s- değişkeni yerine türev operatörü kullanılır ve denklem düzenlenirse denklem 1.7 elde edilecektir.

d) Bir doğrusal sistemin kararlılığı, transfer fonksiyonundan belirlenebilir. Bir transfer fonksiyonu, denklem 1.8 den görüleceği gibi s' e bağlı polinomlar oranıdır. Transfer fonksiyonundaki payda polinomunun kökleri transfer fonksiyonun (sistemin) kutupları ve pay polinomunun kökleri de transfer fonksiyonunun (sistemin) sıfırları adını alır. Denklem 1.8 de verilen transfer fonksiyonunun pay ve paydası çarpanlarına ayrılırsa,

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots\ldots(s+p_n)} \qquad 1.9$$

elde edilir. Burada; z_i- transfer fonksiyonunun sıfırları , p_i = transfer fonksiyonunun kutuplarıdır. Sistemin sıfırları ve kutupları sıfır, gerçek sayı yada karmaşık bir sayı olabilir. Transfer fonksiyonunun payda polinomunun sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen denklem sistemin *karakteristik denklemi* olarak söylenir. Dolayısıyla, karakteristik

denklemin kökleri, diğer bir ifade ile sistemin kutupları olacaktır. Sonuç olarak eğer bir sistemin tüm kutupları yani, karakteristik denkleminin kökleri negatif gerçek kısımlara sahipse o sistem kararlı bir sistemdir. Aksi halde karakteristik denklemin köklerinden bir tanesi bile pozitif gerçek kısma sahip ise o sistem kararsız bir sistemdir. Bu sonuç, matematiksel olarak bölüm 3.6 da gösterilmiştir. Bu açıklamalara göre bir sistemin sıfırları ve kutupları karmaşık s-düzleminde gösterilirse Şekil 1.13 deki gibi kararlılık s-düzleminde belirlenmiş olacaktır. Şekil 1.13 de kutup ve sıfır yerleşimi verilen sistemin kararlı bir sistem olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 1.13 Karmaşık s- düzleminde sıfır ve kutupların yerleşimi ve kararlılık

e) Transfer fonksiyonu, denklem 1.9 da verilen sıfırlar ve kutuplar cinsinden ifadesi yerine sistemin zaman sabitleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(s) = \frac{K.(T_{z1}s+1)(T_{z2}s+1).....(T_{zm}s+1)}{(T_{p1}s+1)(T_{p2}s+1).....(T_{pn}s+1)} \qquad 1.10$$

Denklem 1.10 da, T_{ji} ler sistemin zaman sabitleri, K kazancı ise sistemin kalıcı durum kazancı (yada DC kazancı) olarak söylenir ve K kazancı, sistem çıkışının kalıcı durumunun sistem girişinin kalıcı durumuna oranını gösterir. Yani,

$$K = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{y(t)}{u(t)}\right) \qquad 1.11$$

Diğer bir ifade ile bir sistemin veya transfer fonksiyonunun kalıcı-durum kazancı, sistem modelindeki bütün zamana göre tanımlanan türevlerin sıfıra eşit yapılması koşuluna karşılık gelir. Bu nedenle, kalıcı durum kazancı, herhangi bir düzende

yazılan transfer fonksiyonu için sistemin hem girişine hem de çıkışına son değer teoremi uygulanırsa aşağıdaki limit ile de belirlenebilir.

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) \qquad 1.12$$

Örnek 1.5

Transfer fonksiyonu verilen sistemin, $G(s) = \dfrac{2.5(s+2)}{s^2+2s+5}$

a-)Kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

b-) Birim basamak cevabını bulunuz.

c-) Kalıcı durum kazancını bulunuz.

Çözüm:

a-) Karmaşık s-düzleminde sistemin sıfırı z1=-2 ve kutupları ise p1,2=-1+-j2 noktalarında bulunmaktadır. Sistemin kutupları s-düzleminin sol yarı bölgesinde bulunduğundan, yani kutupların gerçek kısımları negatif olduğundan bu sistem kararlıdır.

b-) Sistemin birim basamak cevabı,

$$Y(s) = G(s).U(s) = \frac{2.5(s+2)}{s^2+2s+5} \cdot \frac{1}{s}$$

Sistemin kutupları karmaşık olduğundan aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$Y(s) = \frac{2.5(s+2)}{s^2+2s+5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+2^2} = \frac{1}{s} - \frac{s-0.5}{(s+1)^2+2^2}$$

Denklem düzenlenirse,

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{1.5}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

Ters laplace dönüşümü ile sistemin zaman bölgesindeki birim basamak cevabı,

$$y(t) = u(t) - e^{-t}Cos(2t) + e^{-t}0.75Sin(2t)$$

yada,

$$y(t) = u(t) + 1.25.e^{-t}Sin(2t - 53^o)$$

c-) Sistemin kalıcı durum kazancı zaman bölgesinde,

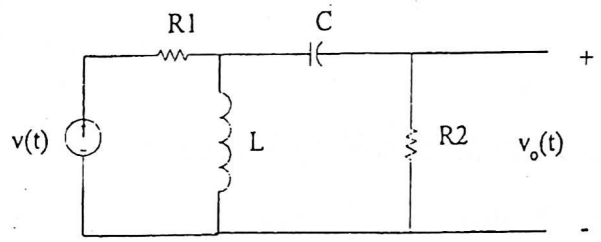
$$K = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{y(t)}{u(t)}\right] = 1$$

olarak bulunur. Sistemin transfer fonksiyonundan yararlanarak s-bölgesinde,

$$K = \lim_{s\to 0} G(s) = 1$$

olarak aynı sonuç elde edilecektir. Kalıcı durum kazancının 1 olması, kalıcı durumda sistemin çıkışının girişine eşit olduğunu gösterecektir.

Örnek 1.6



R1=5

R2=10

L=1 H

C=0.1 F

Şekilde verilen elektrik devresinin,

a-) Transfer fonksiyonunu çıkarınız.

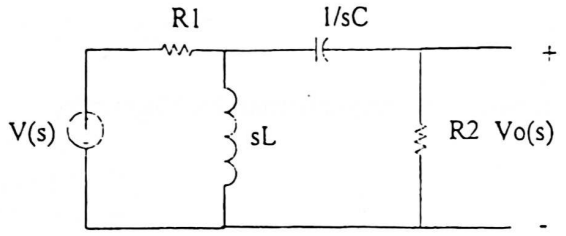
b-) Transfer fonksiyonunu zaman sabitleri cinsinden yazarak devrenin zaman sabitlerini belirleyiniz.

c-) Devrenin DC kazancını, hem transfer fonksiyonundan hem de devrenin sürekli durum analizinden bularak karşılaştırınız.

d-) Devrenin diferansiyel denklemini hem devre üzerinden hem de transfer fonksiyonundan yazınız.

e-) Bu devrenin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:



a-) Şekilde verilen devrenin laplace eşdeğerine düğüm gerilimleri uygulanırsa,

$$\frac{V1(s)-V(s)}{R1}+\frac{V1(s)}{sL}+\frac{V1(s)}{R2+\frac{1}{sC}}=0$$

$$Vo(s)=R2.\frac{V1(s)}{R2+\frac{1}{sC}}$$

İkinci denklemden V1(s) çekilerek birinci denklemde yerine yazılır,

$$Vo(s)\frac{sCR2+1}{sCR2}\left[\frac{1}{R1}+\frac{1}{sL}+\frac{sC}{sCR2+1}\right]=\frac{V(s)}{R1}$$

ve elemanların verilen sayısal değerleri de kullanılarak Vo(s)/V(s) oranı oluşturulursa devrenin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G(s)=\frac{Vo(s)}{V(s)}=\frac{2s^2}{3s^2+12s+10}$$

b-) Bulunan transfer fonksiyonu,

$$G(s)=\frac{2}{3}.\frac{s^2}{(s+2.816)(s+1.183)}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3.331}.\frac{s^2}{(0.355s+1)(0.845s+1)}$$

olarak düzenlenebileceğine göre zaman sabitleri aşağıdaki değerler olacaktır.

$\tau 1 = 0.355$ *sn.*

$\tau 2 = 0.845$ *sn.*

c-) Devrenin kalıcı durum kazancı, a ve b şıklarında elde edilen her hangi bir transfer fonksiyonundan aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$K=\lim_{s\to 0} G(s)=0$$

Kalıcı durum kazancının sıfır çıkması, sürekli durumda sistemin çıkışının sıfıra gideceğini ifade edecektir. Gerçekten verilen devrenin sürekli durumdaki davranışına

bakılırsa, basamak bir giriş sinyali için kondansatörler açık devre ve bobinler kısa devre olacağından vo(t)=0 olduğu görülecektir.

d-) Devrenin diferansiyel denklemi, a şıkkında bulunan transfer fonksiyonundan kolayca aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$3\frac{d^2}{dt^2}v_o(t)+12\frac{d}{dt}v_o(t)+10v_o(t)=2\frac{d^2}{dt^2}v(t)$$

Devrenin diferansiyel denklemi doğrudan zaman bölgesinde de çıkarılabilir. Türev operatörü olarak d/dt yerine D ve integratör operatörü olarak da 1/D kullanılırsa devrenin düğüm denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{vl-v}{Rl}+\frac{vl}{LD}+cDvl-cDvo=0$$

$$\frac{vo}{R2}+CDvo-CDvl=0$$

Bu denklemlerden vl yok edilir ve elemanların sayısal değerleri yerine yazılır,

$$vo\left[\frac{D+1}{D}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{D}+0.1D\right)-0.1D\right]=\frac{v}{5}$$

ve düzenlenirse,

$$vo(1.5D^2+6D+5)=vD^2$$

bulunur. D operatörünün karşılığı yazılırsa yukarıda bulunan diferansiyel denklem elde edilecektir.

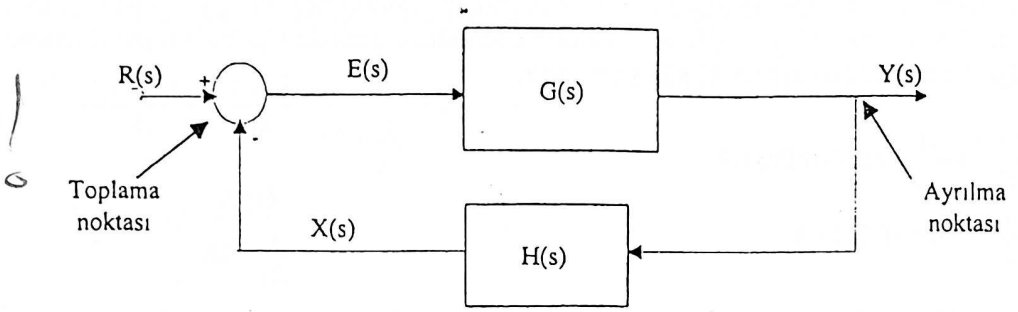
$$1.5\frac{d^2}{dt^2}v_o(t)+6\frac{d}{dt}v_o(t)+5v_o(t)=\frac{d^2}{dt^2}v(t)$$

e-) b şıkkında bulunan kutuplara göre kutuplar negatif gerçek değerlere sahip olduğundan sistem kararlıdır.

1.6 Blok Diyagramları

Bir sistemin blok diyagramı, sistemin her bir elemanı tarafından gerçekleştirilen işlevlerin ve sinyal akışlarının grafiksel gösterimidir. Bir blok diyagramı, denetim sistemini oluşturan birimlerin modellerini (transfer fonksiyonları) içeren bloklar, sinyal akışlarını gösteren yönlendirilmiş çizgiler, toplama noktaları ve ayrılma noktalarından oluşur.

Şekil 1.14 de kapalı çevrim bir denetim sisteminin blok şeması verilmiştir.

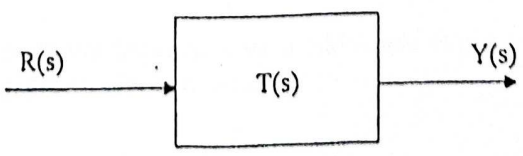


Şekil 1.14 Kapalı çevrim denetim sisteminin blok şeması

Blok şemadan, sinyallerin akış yönü ve hangi blok elemanında hangi sinyallerin işlendiği belli olduğuna göre transfer fonksiyonunun temel tanımını da kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - X(s) \\ X(s) = H(s).Y(s) \\ Y(s) = G(s).E(s) \end{cases} \qquad 1.13$$

Bu denklemlerden E(s) ve X(s) ara sinyalleri yok edilirse denetim sistemi, giriş R(s) ve çıkış Y(s) arasında Şekil 1.15 deki gibi tek bir eşdeğer blokla gösterilebilir.



Şekil 1.15 İndirgenmiş kapalı çevrim denetim sistemi

Elde edilen eşdeğer blokun transfer fonksiyonu, sistemin *kapalı çevrim transfer fonksiyonu* olarak söylenir ve denklem 1.13 deki E(s) ve X(s) ara sinyallerin yok edilmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s).H(s)} \qquad 1.14$$

Sonuç olarak, blok şemalar kullanılarak cebirsel işlemlerle karmaşık haldeki denetim sistemleri sadeleştirilip tek bir bloğa indirgenebilir ve herhangi bir girişe karşı cevabı belirlenebilir. Örneğin, Şekil 1.14 de verilen sistemin herhangi bir giriş için cevabı, Şekil 1.14 yerine Şekil 1.15 deki indirgenmiş hali ve denklem 1.14 kullanılarak belirlenebilir.

Şekil 1.14 deki kapalı çevrim denetim sisteminin blok şemasında geri besleme sinyali X(s) in hata sinyali E(s) e oranı, *açık çevrim (yada çevrim) transfer fonksiyonu* olarak isimlendirilir ve denklem 1.13 den aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\frac{X(s)}{E(s)}=G(s).H(s) \qquad 1.15$$

Örnek 1.7

Şekil 1.14 de verilen blok şemada $G(s)=\frac{1}{s+1}$ ve $H(s)=\frac{1}{s+2}$ olduğunu varsayarak sistemin birim basamak cevabını bulup cevabın zamana göre grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s).H(s)}$$

olduğuna göre sistemin transfer fonksiyonu,

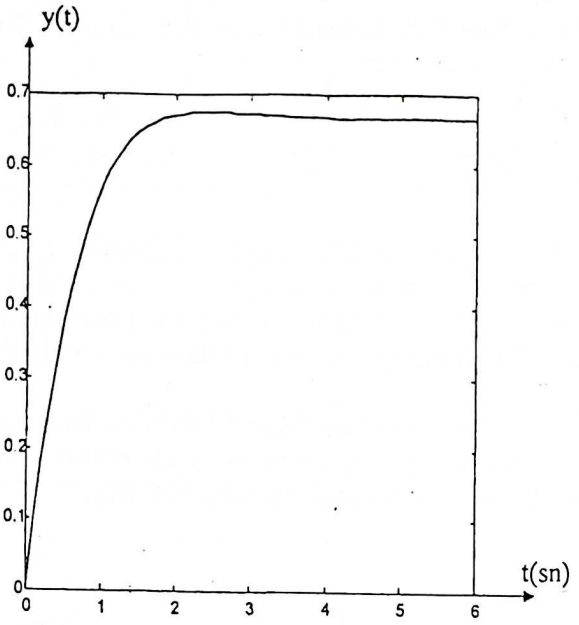
$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s+2}{s^2+3s+3}$$

olarak bulunur. Birim basamak giriş sinyali için sistemin s-bölgesindeki cevabı,

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2+3s+3}.\frac{1}{s}$$

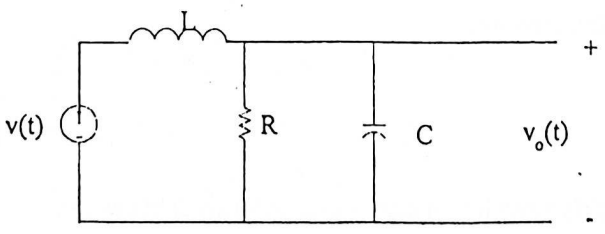
olacaktır. Ters laplace dönüşümü alınarak zaman bölgesindeki cevabı ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t)=\frac{2}{3}u(t)+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}Sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{2}) \quad yada, \quad y(t)=\frac{2}{3}u(t)-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}Cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$



Örnek 1.8

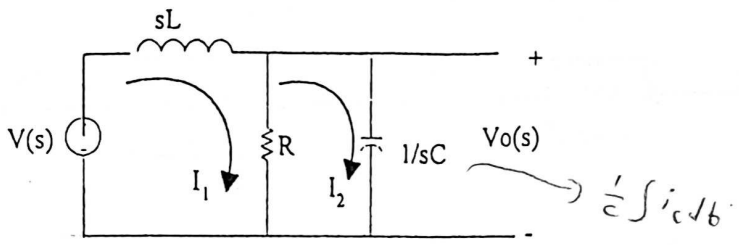
Şekilde verilen elektrik devresinin blok şemasını çizerek temel blok işlemleri ile blok şemayı indirgeyip devrenin transfer fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm:

Bu örnekle birlikte, elektrik devrelerinin blok şemalarının çizilişi de açıklanmış ve karmaşık devrelerin blok şemalarının çizilişi ve transfer fonksiyonu modellerinin bulunuşu, bölüm 2 de verilmiştir.

Elektrik devrelerinin blok şemalarının çizilmesinde, devrenin s-bölgesindeki eşdeğerini kullanmak daha uygundur ve verilen devrenin s-bölgesindeki eşdeğeri aşağıda çizilmiştir.



- s-bölgesindeki eşdeğer devre üzerinde, her bir eleman yada her bir kol (seri ve paralel elemanların eşdeğeri bulunabileceğinden) için uç denklemlerini yazabilecek şekilde çevre akımları ve düğüm gerilimleri işaretlenir.

- Her bir elemanın yada kolun uç denklemleri yazılarak blok şemaya taşınır.

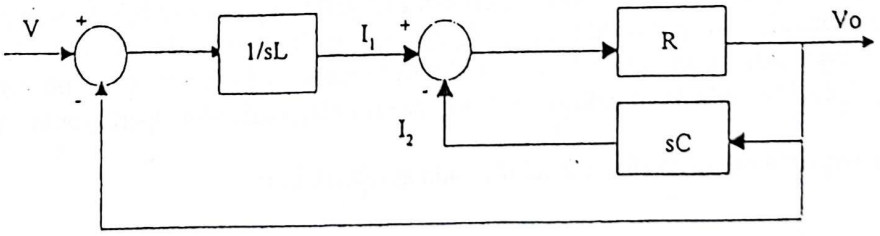
Bu açıklamalar göre s-bölgesindeki eşdeğeri çizilen devrenin çevre akımları işaretlendiğinden ve düğüm gerilimleri de giriş ve çıkış sinyalleri ile belirli olduğundan uç denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir. (sinyallerde s- değişkeni sadelik açısından kullanılmamıştır.)

$$I1 = \frac{V - Vo}{sL}$$

$$I1 - I2 = \frac{Vo}{R}$$

$$Vo = \frac{1}{sC} I2$$

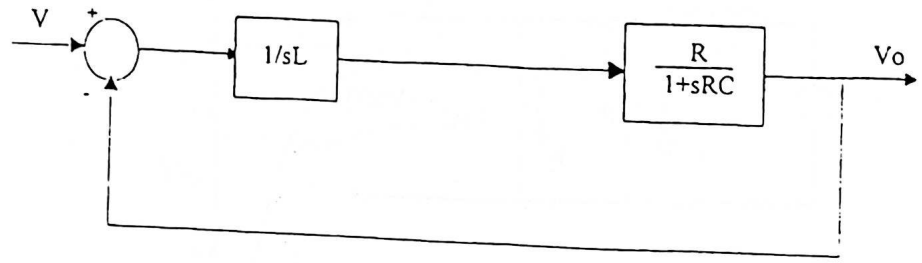
Sıra ile yazılan bu denklemler yine sıra ile blok şemaya taşınırsa aşağıdaki blok şema oluşacaktır.



Elde edilen blok şemada içte bir kapalı çevrim ve dışta bir kapalı çevrim bulunmaktadır. İçteki kapalı çevrimin eşdeğeri aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$G_1(s) = \frac{R}{1 + sRC}$$

Bu denklemden, içteki kapalı çevrimin, paralel bağlı direnç ve kondansatör koluna eşdeğer olduğu görülmektedir. Diğer bir ifade ile, verilen devrede paralel bağlı direnç ve kondansatör devresi yerine eşdeğer empedansı yerleştirilerek ikinci çevre ortadan kaldırılabilir ve devrenin blok şeması çizilebilir. Buna göre sadeleşmiş blok şema,



Buradan devrenin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunacaktır.

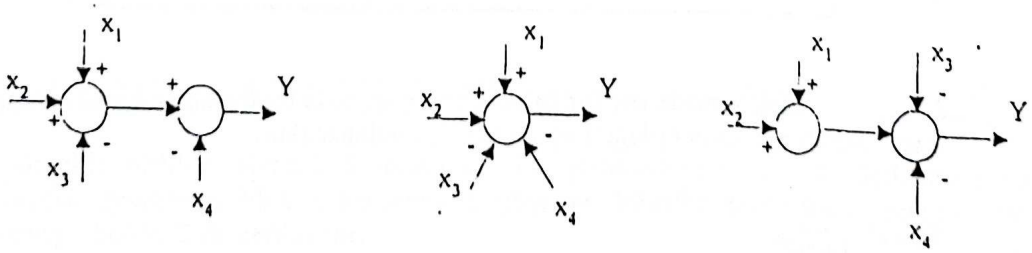
$$G(s)=\frac{Vo(s)}{V(s)}=\frac{\frac{1}{sL}\cdot\frac{R}{1+sRC}}{1+\frac{1}{sL}\frac{R}{1+sRC}}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}$$

olarak elde edilir.

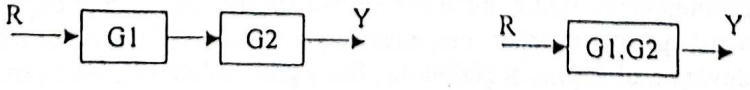
1.6.1 Blok Diyagramlarının İndirgenmesi

Denetim sistemleri genellikle çok sayıda elemanın ileri ve geri besleme yönünde bağlanmasıyla oluşur. Böyle bir sistemin blok diyagramı da oldukça karmaşık bir yapıda ortaya çıkar. Karmaşık bir blok diyagramında ise sistemin girişi ile çıkışı arasındaki bağıntı açık bir şekilde görülmez. Bu nedenle, çok sayıda ileri ve geri besleme çevrimi içeren karmaşık bir blok diyagramı, blok diyagramı indirgeme kurallarını kullanarak basitleştirilip sistem girişinden çıkışına tek bir eşdeğer blokla gösterilmelidir. Blok diyagramlarının indirgenmesi Şekil 1.14 de verilen kapalı çevrim sistemde yapıldığı gibi temel blok işlemlerinden (ara sinyal eşitliklerinden) yararlanılarak yapılabilir. Ancak, bu işlemler ve özellikle yazılan eşitliklerde ara sinyallerin yok edilmesi oldukça zor olabilir. Bu nedenle de genellikle blok diyagramı indirgenmesinde basit blok kaydırma operasyonları ile karmaşık bloklar, daha sade standart blok yapılarına dönüştürülebilir. Aşağıdaki tabloda, blok indirgenmesinde önemli olan basit blok operasyonları verilmiştir.

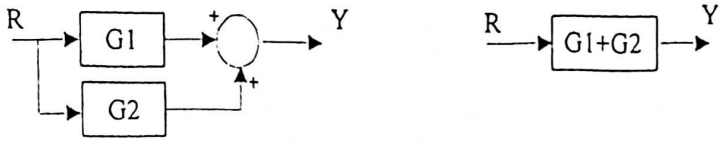
1-) Toplama noktaları birleştirilebilir yada ayrıştırılabilir.



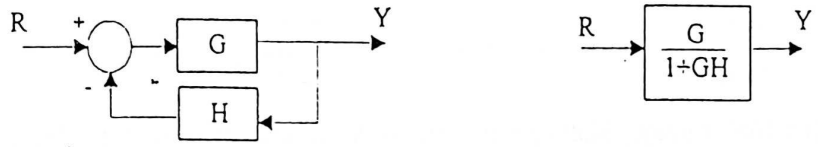
2-) Seri bloklar tek bir eşdeğer bloğa indirgenebilir.



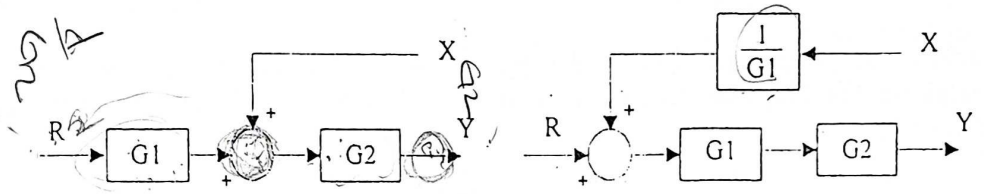
3-) Paralel bloklara tek bir eşdeğer bloğa indirgenebilir.



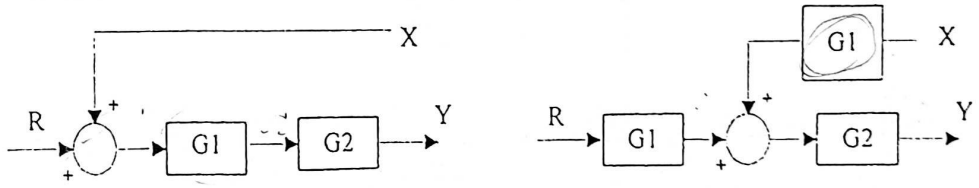
4-) Kapalı çevrimler aşağıdaki gibi tek bir eşdeğer bloğa indirgenebilir.



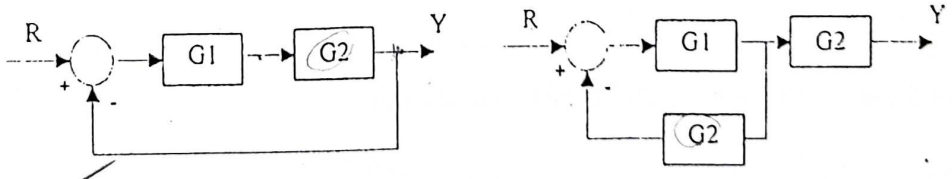
5-)Bir toplama noktasına gelen sinyal, aşağıdaki gibi bir bloğun önüne alınabilir.



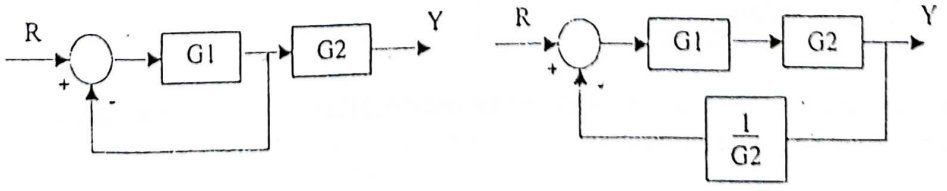
6-) Madde 5 deki operasyonun tersi olarak bir toplama noktasına gelen sinyal, aşağıdaki gibi bir bloğun sonuna alınabilir.



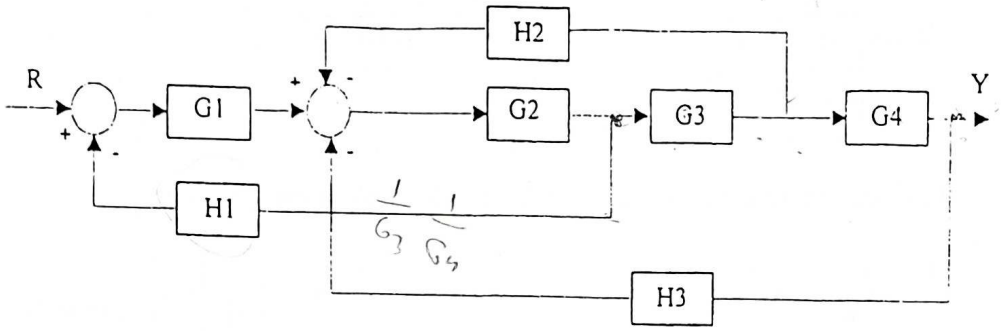
7-) Bir ayrılma noktasından ayrılan bir sinyal, aşağıdaki gibi bir bloğun önüne alınabilir.



8-) Madde 7 deki operasyonun tersi olarak, bir ayrılma noktasından ayrılan bir sinyal, aşağıdaki gibi bir bloğun sonuna alınabilir.



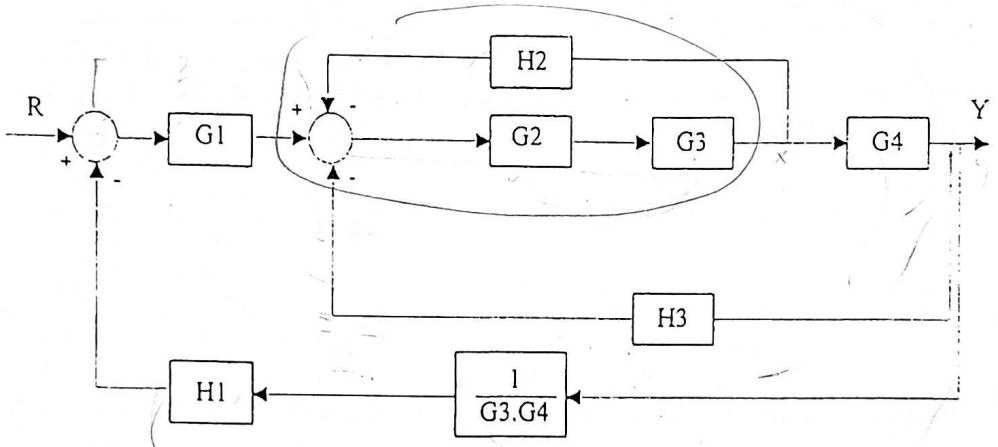
Örnek 1.9



Şekilde verilen blok şemayı, blok operasyonlarını kullanarak indirgeyip tek bir eşdeğer blok haline getiriniz.

Çözüm:

Verilen blok şemanın genel bir gözden geçirilmesi sonucunda H1 bloğuna gelen ayrılma noktasının G4 bloğunun sonuna alınmasıyla, blok şemanın kolayca indirgenebileceği görülebilir.



Bu durumda blok şema aşağıdaki gibi indirgenebilir.

$$GA = \frac{G2G3}{1+G2G3H2} \qquad GB = \frac{GAG4}{1+GAG4H3}$$

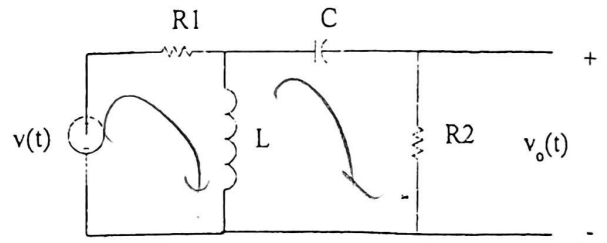
$$T = \frac{Y}{R} = \frac{G1GB}{1+G1GBH1\dfrac{1}{G3G4}}$$

GA ve GB nin eşitliklerinin yazılması ve sadeleştirilmesi sonucunda aşağıdaki transfer fonksiyonu elde edilecektir.

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{G1G2G3G4}{1+G1G2H1+G2G3H2+G2G3G4H3}$$

Örnek 1.10

Şekilde verilen elektrik devresinin (örnek 1.6 da incelenen devre) blok şemasını çiziniz ve blok şemayı indirgeyerek tek bir eşdeğer blok haline getiriniz, yani devrenin transfer fonksiyonunu bulunuz.



R1=5

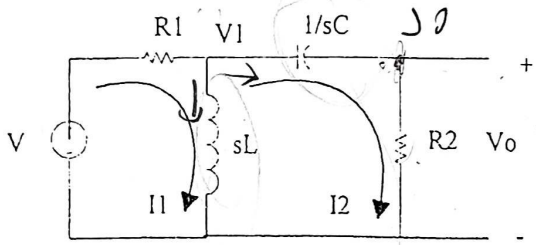
R2=10

L=1 H

C=0.1 F

Çözüm:

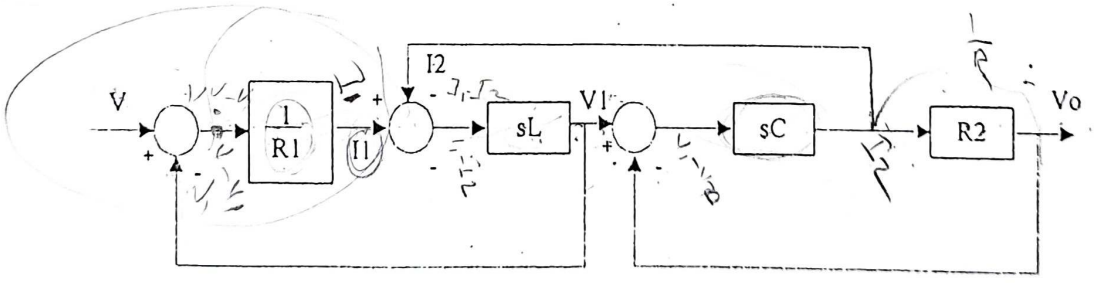
Verilen devrenin blok şemasını çizebilmek için öncelikle devrenin s-bölgesindeki eşdeğeri üzerinde çevre akımları ve düğüm gerilimleri işaretlenmelidir.



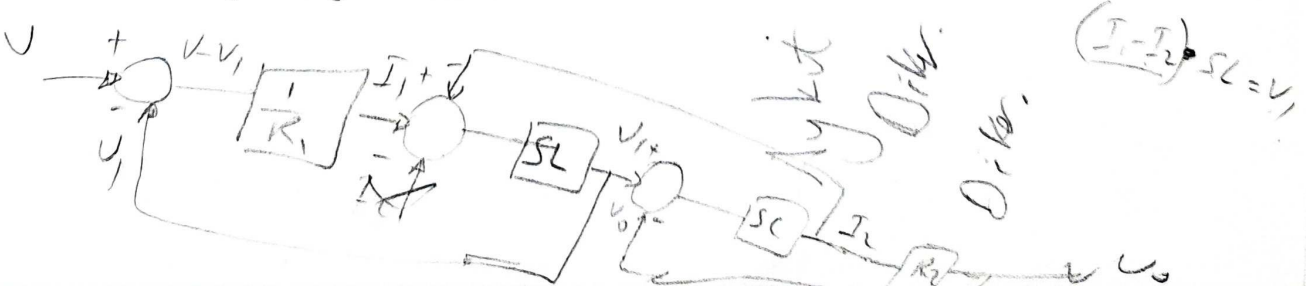
İşaretlenen sinyallere göre elemanların uç denklemleri aşağıdaki gibi yazılacaktır.

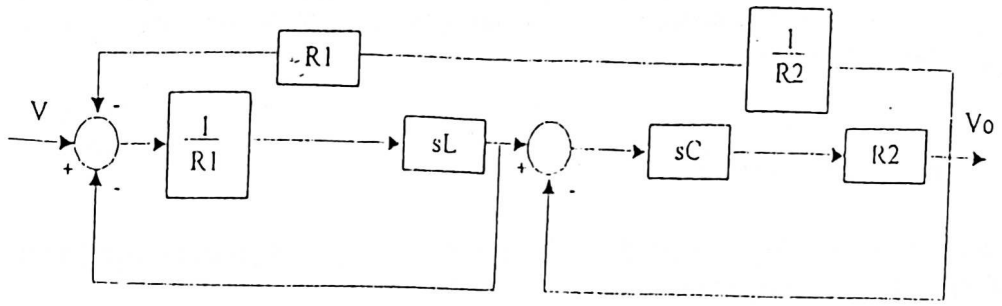
$$I1 = \frac{V - V1}{R1}, \quad (I1 - I2) = \frac{V1}{sL}, \quad I2 = \frac{V1 - Vo}{\frac{1}{sC}}, \quad Vo = R2I2$$

Devre üzerinde sıra ile yazılan bu denklemler yine sıra ile blok şemaya taşınırsa aşağıdaki blok elde edilecektir.



Bu blok şemada I2 sinyali, toplama noktasında 1/R1 bloğunun önüne alınır ve ayrılma noktasında da R2 bloğunun sonuna alınırsa aşağıdaki gibi daha sade bir blok elde edilecek ve kolayca indirgenebilecektir.





Buna göre,

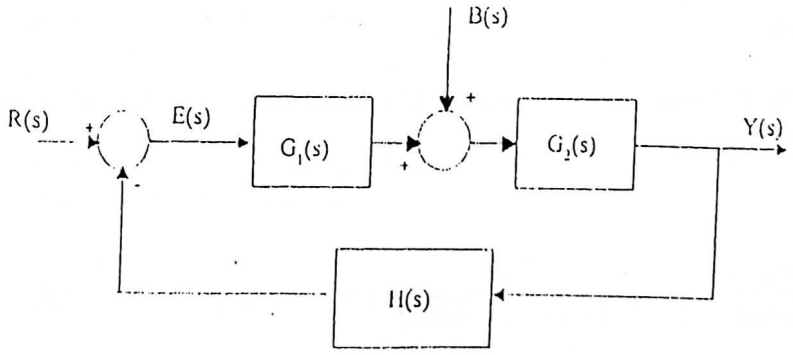
$$G1 = \frac{\frac{sL}{R1}}{1+\frac{sL}{R1}} \quad , \quad G2 = \frac{sCR2}{1+sCR2} \quad , \quad T = \frac{Vo}{V} = \frac{G1G2}{1+G1G2\frac{R1}{R2}}$$

olarak yazılabilir. G1 ve G2 eşitlikleri yerine yazılıp sadeleştirilirse devrenin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$T = \frac{Vo}{V} = \frac{s^2LCR2}{(R1+sL)(1+sCR2)+s^2LCR1} = \frac{s^2}{1.5s^2+6s+5}$$

1.6.2 Bozucu Girişli Kapalı Çevrim Sistemlerin Blok Diyagramı

Şekil 1.16 da bozucu girişi bulunan kapalı çevrim bir denetim sistem verilmiştir. Bozucu girişlerin sisteme etkileri, toplama noktasında artı veya eksi yönde olabilir ve sisteme herhangi bir noktadan etki edebilir.



Şekil 1.16 Bozucu girişli bir denetim sistemi

Denetim sistemi doğrusal olduğundan toplamsallık (superpozisyon) teoremi uygulanabilir ve sistemin toplam çıkışı, her bir girişe verdiği cevapların toplamı şeklinde alınabilir. Dolayısıyla, bozucu giriş niteliğinde de olsa birden fazla girişi olan doğrusal denetim sistemlerinin blok diyagramı ancak her bir girişten her bir çıkışa ayrı ayrı indirgenmelidir.

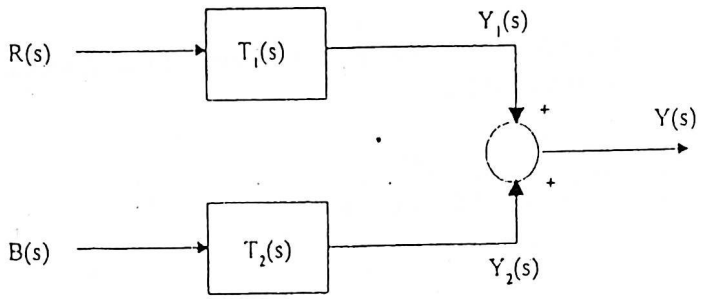
Şekil 1.16 daki blok şemada bozucu giriş B(s)=0 kabul edilirse sistemin gerçek girişi R(s) den Y(s) e (toplamsallık teoremi uygulandığından $Y_1(s)$ e) bir transfer fonksiyonu (örneğin $T_1(s)$) elde edilecektir.

$$T1(s) = \frac{Y1(s)}{R(s)} = \frac{G1(s).G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)} \qquad 1.16$$

Benzer şekilde, gerçek giriş R(s)=0 kabul edilirse bozucu giriş B(s) den çıkışa (yani $Y_2(s)$ e) bir transfer fonksiyonu (örneğin $T_2(s)$) bulunacaktır.

$$T2(s) = \frac{Y2(s)}{B(s)} = \frac{G2(s)}{1 - G1(s).G2(s).H(s)} \qquad 1.17$$

Buna göre sistem, aşağıdaki gibi indirgenmiş blok şema ile gösterilebilir.



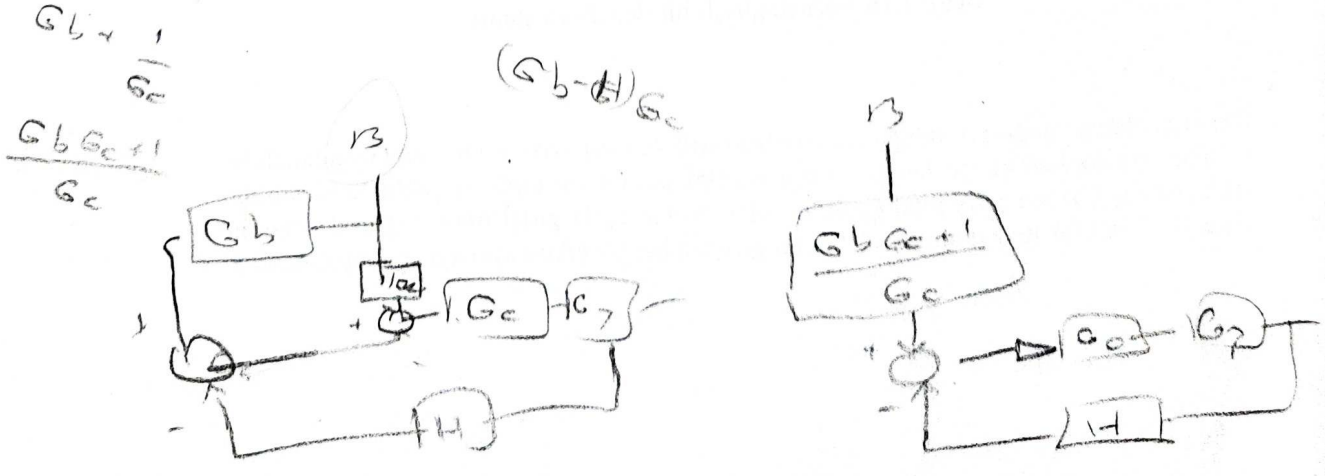
Şekil 1.17 İndirgenmiş blok şema

Sistemin toplam cevabı, toplamsallık teoremine göre sistemin her bir girişe verdiği cevapların toplamı olduğundan,

$$Y(s) = Y1(s) + Y2(s) \qquad 1.18$$

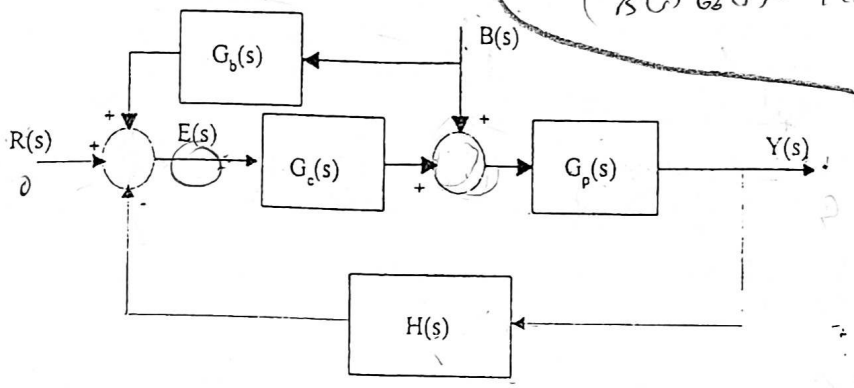
olacaktır. Sonuçta, sistemin eşdeğer tek bir transfer fonksiyonu yerine sistemin toplam çıkışı yazılabilecektir.

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s).G_2(s).H(s)} R(s) + \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s).G_2(s).H(s)} B(s) \qquad 1.19$$



Örnek 1.11

Şekilde verilen blok şemada, bozucu girişin sistemin çıkışı üzerinde hiçbir bir etkisinin olmaması için $G_c(s)$ ne olmalıdır.



Çözüm:

Toplamsallık teoremi uygulanarak R(s) girişine göre sistemin transfer fonksiyonu,

$$T1(s)=\frac{Y1(s)}{R(s)}=\frac{Gc(s).Gp(s)}{1+Gc(s).Gp(s).H(s)}$$

Benzer şekilde, B(s) girişine göre sistemin transfer fonksiyonu ,

$$T2(s)=\frac{Y2(s)}{B(s)}=\frac{Gp(s)(1+Gc(s)Gb(s))}{1+Gc(s).Gp(s).H(s)}$$

olarak elde edilir. Sistemin çıkışı ise,

$$Y(s)=\frac{Gc(s).Gp(s)}{1+Gc(s).Gp(s).H(s)}R(s)+\frac{Gp(s)(1+Gc(s)Gb(s))}{1+Gc(s).Gp(s).H(s)}B(s)$$

olacaktır. Buna göre bozucu giriş B(s) in sistem çıkışı üzerinde bir etkisinin olmaması için T2(s)=0 olmalıdır. Buradan,

$$T2(s)=\frac{Gp(s)(1+Gc(s)Gb(s))}{1+Gc(s).Gp(s).H(s)}=0$$

koşulunu sağlayan Gc(s) değeri,

$$Gp(s)(1+Gc(s)Gb(s))=0 \quad , \quad Gc(s)=-\frac{1}{Gb(s)}$$

olarak bulunur.

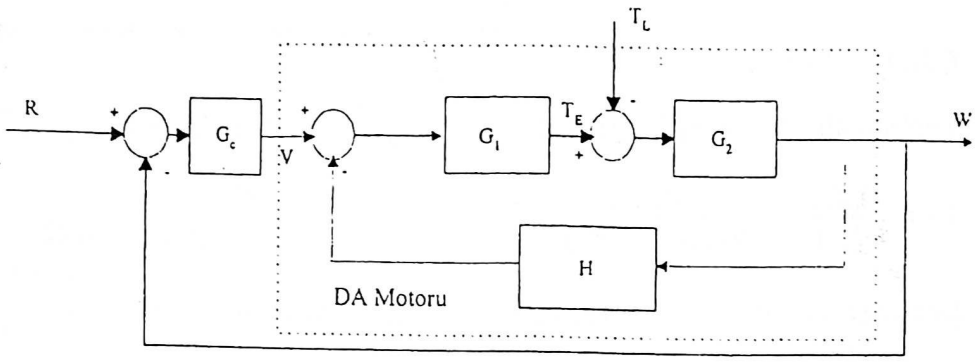
ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) 2.. 66 , Hayat V.D. 253 014 9917

Örnek 1.12

Şekilde, içte kesik çizgilerle çevrili blok, bir doğru akım motorunun modelini vermektedir. (Bu model bölüm 2 de çıkarılmıştır.) Motora besleme gerilimi V(s) uygulanmakta ve ayrıca motorun çalışması sırasında motora $T_L(s)$ yük torku binmekte ve sonuçta motordan W(s) açısal hızı alınmaktadır. Bu motora, transfer fonksiyonu Gc(s) olan bir denetleyici bağlanarak motorun hızı denetlenecektir. Yük torkunun, motorun hızı üzerinde hiç bir etkisinin olmaması için,

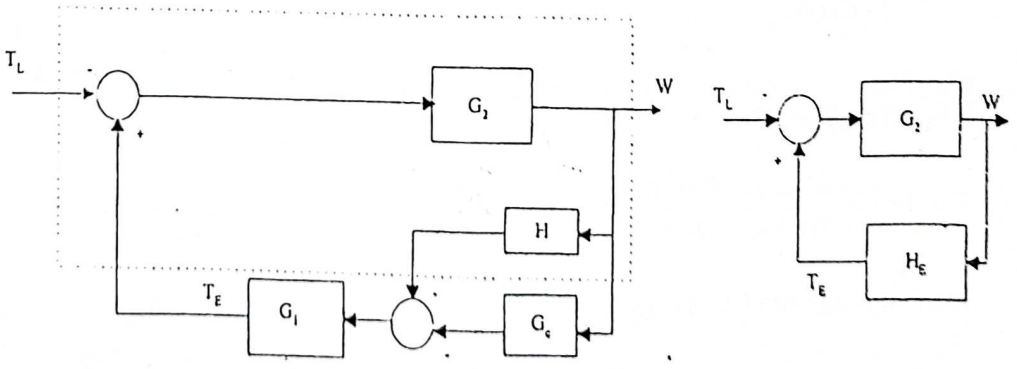
a-) Yük torkunu ölçmeksizin, örneğin sadece T_E torkunu ölçerek ve gerekirse başka bir kompansatör de kullanmak üzere T_L torkunun etkisi tam olarak yok edilebilir mi?

b-) Yük torkunu ölçmek koşulu ile yük torkunun etkisini yok edecek bir kompanstör tasarlayınız.



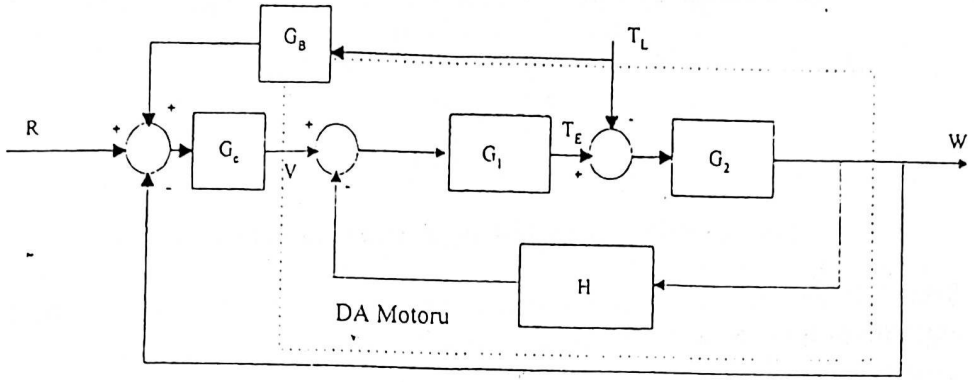
Çözüm:

a-)Yük torku T_L ye göre (R=0 için) blok şema düzenlenirse aşağıdaki blok elde edilecektir.



T_E 'den G_c girişine geri besleme yapılarak T_L 'nin etkisinin yok edilebileceğini gösteriniz.

b-) Örnek 1.11 deki duruma benzer biçimde T_L ölçülerek ilk toplama noktasına bağlanan bir G_B kompansatörü yardımı ile T_L nin etkisi yok edilebilir.



R=0 koşulu ile blok şema indirgenirse, sistemin yük torkuna göre transfer fonksiyonu,

$$T_2 = \frac{W}{T_L} = \frac{G_1.G_2.G_C.G_B - G_2}{1 + G_1.G_2.G_c + G_1.G_2 H}$$

ve T_2=0 koşulunu sağlayan kompansatör,

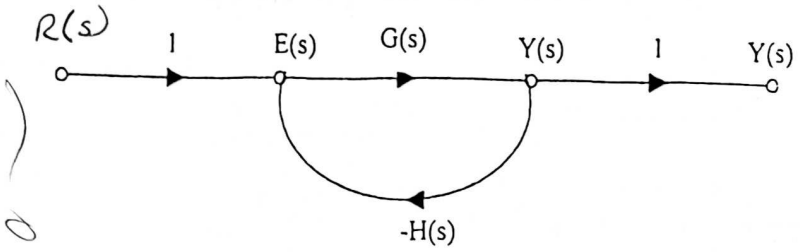
$$G_B = \frac{1}{G_1.G_c}$$

olarak bulunur.

1.7 Sinyal Akış Şemaları

Blok diyagramları, denetim sistemlerinin grafiksel gösterimi için oldukça faydalıdır ancak, çok karmaşık sistemlerde, blok diyagramı indirgeme işlemleri çok zaman alıcı olmaktadır. Buna karşılık karmaşık denetim sistemlerinin sistem değişkenleri arasındaki bağıntıları bulmak için diğer bir yaklaşım olarak sinyal akış şemaları kullanılır. Sinyal akış şemaları, blok diyagramları gibi sistemlerin neden-sonuç ilişkilerini göstermek için kullanılır. Sinyal akış şemaları, blok diyagramlarına göre daha basit inceleme olanağı sağlayan bir yöntemdir.

Bir sinyal akış şeması, yönlendirilmiş çizgiler yoluyla bağlanmış düğümlerin teşkil ettiği bir ağdan ibarettir. Her bir düğüm noktası, sistemdeki bir değişkeni (sinyali) gösterir. İki düğümü birleştiren her bir kol, değişkenler arasındaki transfer fonksiyonunu yada kazancını belirler. Bir sinyal akış şeması bir blok diyagramı ile aynı bilgiyi taşır ancak, kazanç formülü (Mason kazanç formülü) yardımı ile sinyal akış şemalarının indirgenmesi daha kolay gerçekleştirilebilir. Şekil 1.14 de blok şeması verilen kapalı çevrim denetim sisteminin sinyal akış şeması olarak çizilişi Şekil 1.18 de verilmiştir.



Şekil 1.18 Kapalı çevrim denetim sisteminin sinyal akış şeması

Şekil 1.18 deki sinyal akış şeması üzerinde aşağıdaki tanımları anlamak ilerideki sinyal akış şeması işlemleri açısından yararlı olacaktır.

Düğüm

Bir değişkeni veya sinyali gösteren bir noktadır. Şekil 1.18 de R(s), E(s) ve Y(s) birer düğümdür.

Giriş Düğümü

Yalnızca kendisini terkeden kolları olan düğümdür. Bu durum bağımsız bir değişkene sahip olan düğümü ifade eder ve şekil 1.18 de R(s) bir giriş düğümüdür.

Çıkış Düğümü

Yalnızca kendisine gelen yönde kolları olan düğümdür. Sistemin bağımlı değişkenini temsil eder ve şekil 1.18 de Y(s) bir çıkış düğümüdür.

Karmaşık Düğüm

Hem kendisine gelen ve hem de kendisini terkeden kollara sahip bir düğümdür ve sistem içerisinde işlenen ara sinyalleri temsil eder. Şekil 1.18 de E(s) bir karmaşık düğümdür.

Geçiş Fonksiyonu

İki düğüm arasındaki kazanç yada transfer fonksiyonudur. Şekil 1.18 de G(s), H(s) ve birim kazançlar birer geçiş fonksiyonudur.

Kol

İki düğümü birleştiren yönlendirilmiş çizgidir. Kola ait kazanç yada transfer fonksiyonu bu çizginin üzerine yazılır ve şekil 1.18 de geçiş fonksiyonlarının bulunduğu çizgiler birer kol olarak söylenir.

İleri Besleme Yolu

Herhangi bir düğümü birden fazla geçmeksizin giriş düğümünden çıkıp, çıkış düğümüne giden yoldur. Şekil 1.18 de R(s) ve E(s) düğümlerinden geçerek G(s) üzerinden Y(s) e giden bir adet ileri besleme yolu vardır.

İleri Besleme Yol Kazancı

İleri besleme yolu üzerindeki kol kazançlarının çarpımıdır. Şekil 1.18 de, 1.G(s).1 , değeri ileri besleme yol kazancıdır.

Çevrim

Bir düğümde başlayıp oklar yönünde yine aynı düğüme gelerek oluşan kapalı bir yoldur. Şekil 1.18 de E(s) den başlayıp G(s) ve H(s) üzerinden tekrar E(s) e gelinen yol, bir kapalı çevrimdir.

Çevrim Kazancı

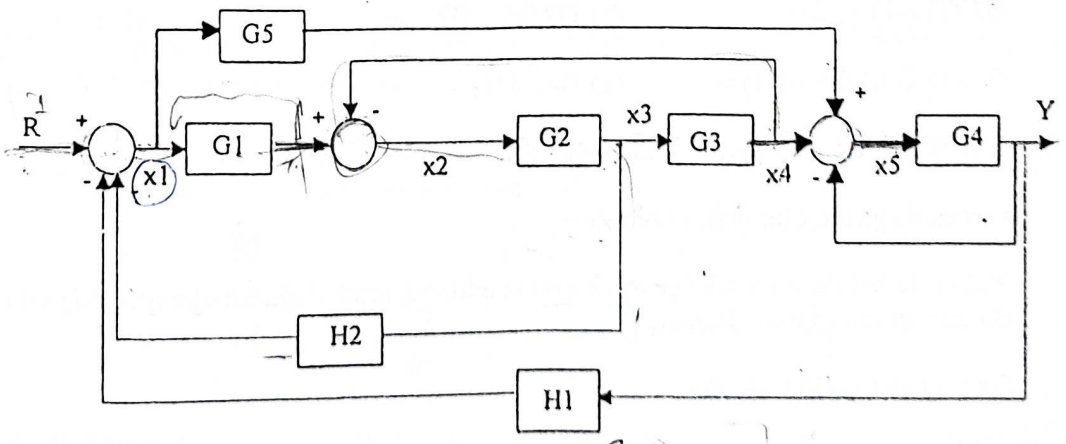
Çevrim yolu üzerinde bulunan kol kazançlarının çarpımıdır. Şekil 1.18 de G(s).H(s) çarpımı, çevrim kazancı olarak söylenir.

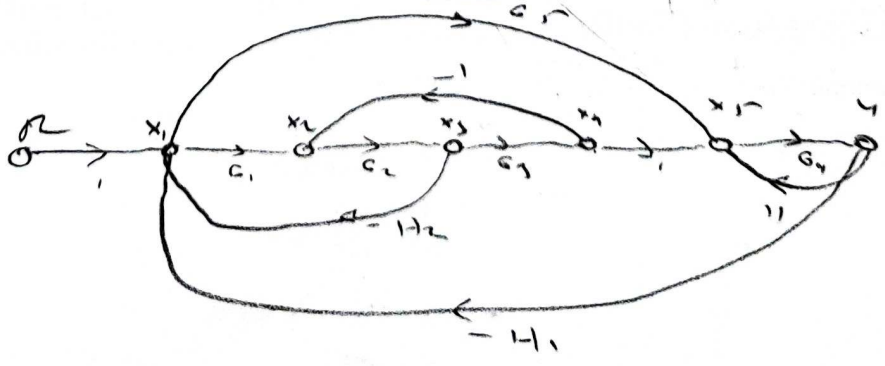
Birbirine Dokunmayan Çevrimler

Ortak düğümlere sahip olmayan çevrimlerdir. Şekil 1.18 de tek bir çevrim olduğundan dokunmayan çevrimi de yoktur.

Örnek 1.13

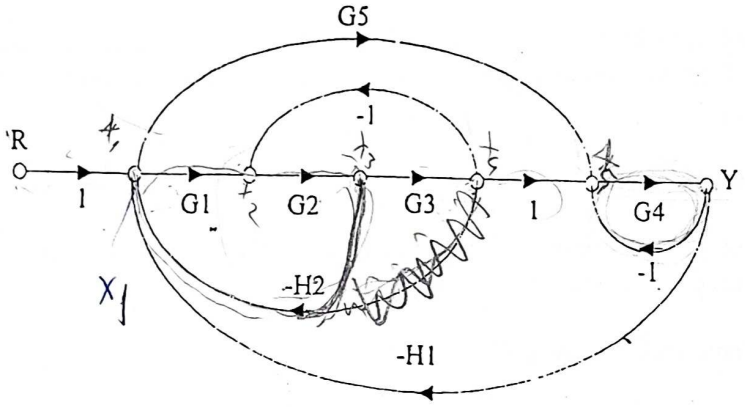
Blok şeması verilen denetim sisteminin sinyal akış şemasını çiziniz ve çizdiğiniz şema üzerinde düğümleri, ileri yolları çevrimleri, çevrim kazançlarını ve ortak düğümü olmayan çevrimleri belirleyiniz.





Çözüm:

Verilen blok şemada işaretlenen sinyaller (x1, x2,....) ve kazanç değerlerine göre sinyal akış şeması aşağıdaki gibi çizilir.



Buna göre, düğümler R; x1, x2, x3, x4 , x5 ve Y olmak üzere işaretlenmiştir.

İleri yollar:

1.G1.G2.G3.1.G4

ve

1.G5.G4

kazançları üzerinden olmak üzere iki adet ileri yol bulunmaktadır.

Çevrimler ve çevrim kazançları:

G2.G3.(-1) G1.G2.(-H2) G4.(-1)

G1.G2.G3.1.G4.(-H1) G5.G4.(-H1)

Olmak üzere 5 adet çevrim bulunmaktadır.

Ortak düğümü olmayan çevrimler:

Yukarıda belirlenen 5 adet çevrime dikkat edilirse, ortak düğümü olmayan ikişerli olarak iki adet çevrim vardır. Bunlar,

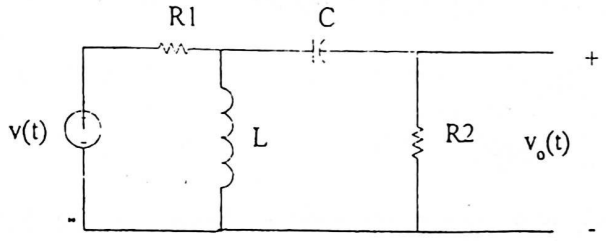
G4.(-1) ve G2.G3.(-1) ile

G4.(-1) ve G1.G2.G3.(-H2)

çevrimleridir.

Örnek 1.14

Şekilde verilen elektrik devresinin (örnek 1.10 da incelenen devre) sinyal akış şemasını çiziniz.



R1=5

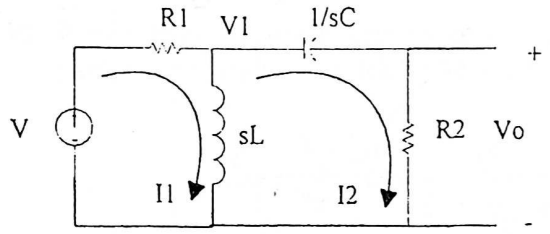
R2=10

L=1 H

C=0.1 F

Çözüm:

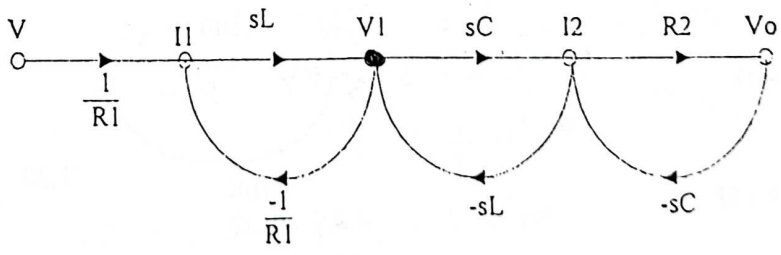
Verilen devrenin sinyal akış şemasını çizebilmek için öncelikle devrenin s-bölgesindeki eşdeğeri üzerinde çevre akımları ve düğüm gerilimleri işaretlenmelidir.



İşaretlenen sinyallere göre elemanların uç denklemleri aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$I1 = \frac{V - V1}{R1} \quad , \quad I1 - I2 = \frac{V1}{sL} \quad , \quad I2 = \frac{V1 - Vo}{\frac{1}{sC}} \quad , \quad Vo = R2I2$$

Devre üzerinde sıra ile yazılan bu denklemler yine sıra ile sinyal akış şemasına taşınırsa aşağıdaki şema elde edilecektir.



NOT: Örnek 1.10 da aynı devrenin blok şeması çizilmişti. Bu blok şemayı, sinyal akış şemasına dönüştürdüğünüzde yukarıdaki sinyal akış şeması elde ediliyor mu? Araştırınız.

1.7.1 Sinyal Akış Şemalarının İndirgenmesi

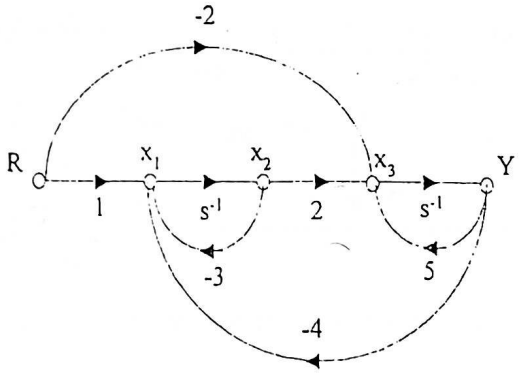
Karmaşık sinyal akış şemalarında giriş-çıkış bağıntılarını belirlemek (sistemin transfer fonksiyonunu bulmak) için karmaşık haldeki bu şemalar indirgenerek tek bir koldan oluşan sinyal akış şeması haline getirilmelidir. Sinyal akış şemaları genel olarak iki yöntemle indirgenebilir.

a-) Temel sinyal akış şeması işlemleri ile,

b-) Kazanç formülü (Mason kazanç formülü) ile.

Temel sinyal akış şeması işlemleri, blok diyagramlarındakine benzer şekilde bütün düğüm sinyallerinin eşitliklerini yazarak ara düğümlerin (karmaşık düğümlerin) sinyallerini yok etmek ve sadece giriş çıkış sinyalleri arasındaki eşitliği yani sistemin transfer fonksiyonunu belirlemekten ibarettir.

Sinyal akış şemalarının temel işlemi, düğüm değerlerinin belirlenmesidir ve bir düğümün değeri, kendisine gelen sinyallerin toplamıdır.



Şekil 1.19 Örnek bir sinyal akış şeması

Buna göre Şekil 1.19 da verilen sinyal akış şemasının ara düğümlerinin ve çıkış düğümünün değerleri (örneğin, bu düğümlere x1,x2,... isimleri verilirse) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
x1 &= R - 3x2 - 4Y \\
x2 &= \frac{1}{s} x1 \\
x3 &= 2x2 - 2R + 5Y \\
Y &= \frac{1}{s} x3
\end{aligned}
\qquad 1.20
$$

$x_1 = R - 3x_2 - 4Y$

$x_2 = \frac{1}{s} x_1$

$x_3 = 2x_2 + 5Y - 2R$

$Y = \frac{1}{s} x_3$

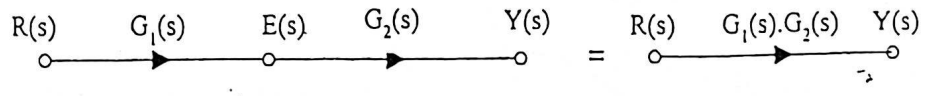
Bu denklemlerden ara düğümler yok edilerek giriş-çıkış arasındaki sistemin eşdeğer transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$x_2 = (R - 3x_2 - 4Y)\frac{1}{s}$

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=-\frac{2s+4}{s2+8s+23} \qquad 1.21$$

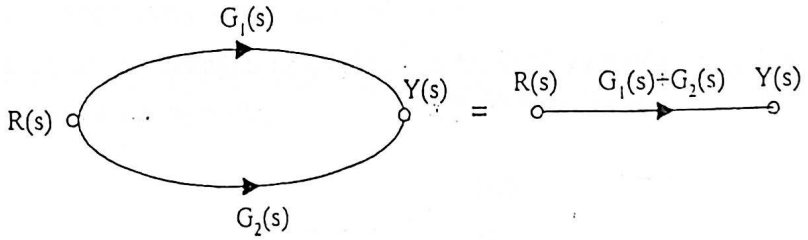
Diğer taraftan, düğüm değerlerinin yazılıp düzenlenmesi ile de kolayca çıkarılabilecek olan aşağıdaki kurallar yardımıyla da karmaşık bir sinyal akış şeması indirgenebilir.

a) Seri bağlı kolların toplam kazancı, kol kazançlarının çarpımına eşittir. Buna göre seri bağlı kollar, tek bir kol içinde birleştirilebilir. Bu durum, düğümlerin sinyal değerleri yazılıp sadeleştirilerek kolayca görülebilir.



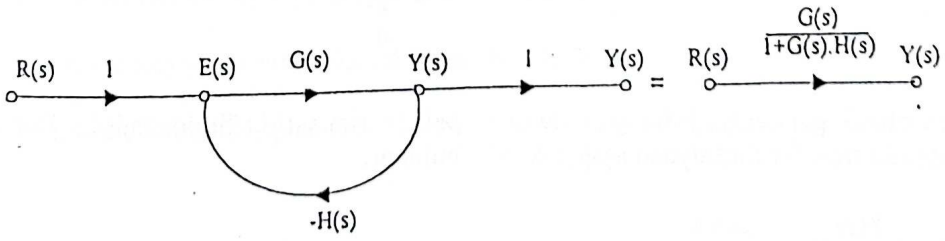
Şekil 1.20 Seri bağlı kolların eşdeğeri

b) Paralel bağlı kolların toplam kazancı, kol kazançlarının toplamına eşittir. Buna göre, paralel bağlı kollar, tek bir kol haline indirgenebilir.



Şekil 1.21 Paralel bağlı kolların eşdeğeri

c) Bir çevrim ise yine düğüm değerlerinin yazılarak sadeleştirilmesi sonucu aşağıdaki gibi indirgenebilir.



Şekil 1.22 Bir çevrimin eşdeğeri

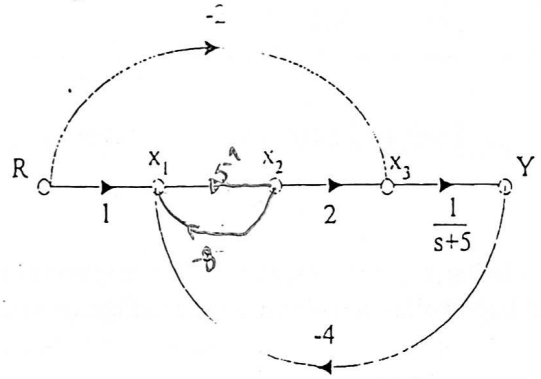
d-) Blok şemalardaki yapıldığı gibi, sinyal akış şemalarında da bir düğüme gelen sinyal yada bir düğümden ayrılan sinyal, bir kolun (kazancın) önüne yada sonuna alınabilir.

Örnek 1.15

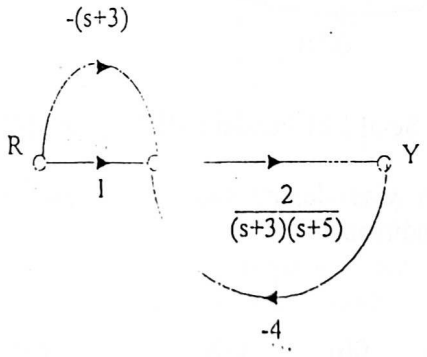
Şekil 1.19 da verilen örnek sinyal ; şemasını sadeleştirerek sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

Şekil 1.19 daki sinyal akış şemasında, i iki adet kapalı çevrim olduğu görülmektedir. Bu kapalı çevrimler indirgenirse aşağıda' inyal akış şeması elde edilecektir.



Burada, R düğümünden x3 düğümüne gi : sinyal x1 düğümüne alınır ve sadeleştirilirse aşağıdaki sinyal akış şeması elde edilir.



Son olarak paralel bağlı bir grup ile bir palı çevrim seri bağlı durumdadır. Buna göre sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gi bulunur.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = -\frac{2s+4}{s2+8s+23}$$

Mason Kazanç Formülü

Karmaşık sinyal akış şemaları için yukarıda verilen işlemler yada kurallarla bir sinyal akış şemasını indirgemek oldukça zor olabilir. Bu nedenle, geliştirilen bir kazanç formülü ile çok karmaşık da olsa bir sinyal akış şeması, daha kolay sadeleştirilebilir. Mason kazanç formülü olarak bilinen bu formül aşağıdaki denklemle tanımlanır.

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{T_k.\Delta_k}{\Delta} \qquad 1.22$$

Burada,

Y(S)- Çıkış düğüm değişkeni (sistemin çıkış sinyali), R(s)-giriş düğüm değişkeni (sistemin giriş sinyali), N- sinyal akış şemasındaki ileri besleme yol sayısı, T_k- k ıncı ileri besleme yolu kazancı, Δ_k- k ıncı ileri besleme yoluna ait determinant değeri ve Δ- ise sinyal akış şemasının toplam determinant değeri olup Δ değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Δ =1-(Bütün farklı çevrim kazançlarının toplamı) + (Birbirine dokunmayan bütün ikili çevrimlerin kazançlarının çarpımlarının toplamı)-(Birbirine dokunmayan bütün üçlü çevrimlerin kazançlarının çarpımlarının toplamı)+ ....

Δ_k= k ıncı ileri besleme yolu sinyal akış şemasından çıkarıldıktan sonra geriye kalan sinyal akış şemasının Δ değeridir.

Buna göre, Mason kazanç formülünü uygulayabilmek için,

a) Verilen sinyal akış şemasının ileri besleme yol sayısı belirlenir.

b) Belirlenen ileri besleme yollarına ait yol kazançları belirlenir.

c) Her bir ileri besleme yoluna ait Δ değeri belirlenir.

d) Sinyal akış şemasının toplam Δ değeri belirlenir.

e) Kazanç formülü uygulanarak sistemin toplam transfer fonksiyonu bulunur.

Örnek 1.16

Örnek 1.13 de verilen blok şemaya yada blok şemanın sinyal akış şeması karşılığına kazanç formülünü uygulayarak indirgeyiniz (sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz).

Çözüm:

Örnek 1.13 de sinyal akış şemasının çevrim kazançları, ileri yolları ve ortak düğümü olmayan çevrimleri belirlenmiştir. Buna göre sinyal akış şemasındaki iki adet ileri besleme yolunun kazançları,

$T1 = G1.G2.G3.G4$

$T2 = G4.G5$

ve bu yollara ait delta değerleri,

$\Delta 1 = 1$

$\Delta 2 = 1 + G2.G3$

olacaktır. Sinyal akış şemasının toplam delta değeri ise,

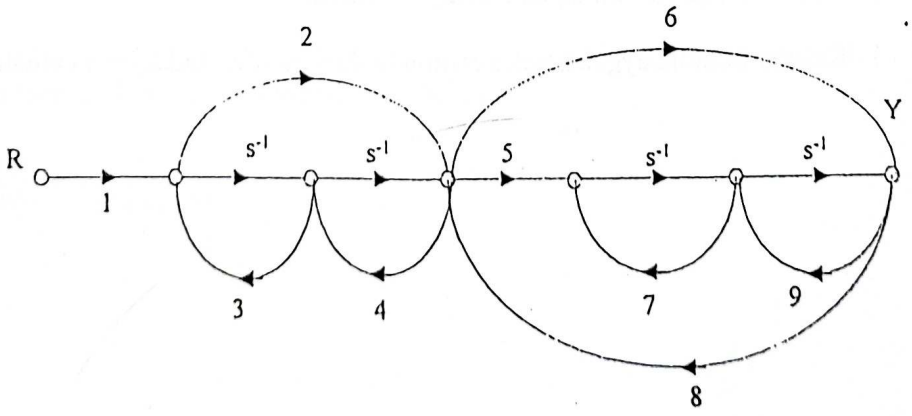
$$\Delta = 1 - (-G_2.G_3 - G_1.G_2.G_3.H_2 - G_4 - G_1.G_2.G_3.G_4.H_1 - G_4.G_5.H_1) + (G_2.G_3.G_4 + G_1.G_2.G_3.G_4.H_2)$$

Buna göre sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$T = \frac{G_1.G_2.G_3.G_4 + G_4.G_5(1 + G_2.G_3)}{1 + G_2.G_3 + G_1.G_2.G_3.H_2 + G_4 + G_1.G_2.G_3.G_4.H_1 + G_4.G_5.H_1 + G_2.G_3.G_4 + G_1.G_2.G_3.G_4.H_2}$$

Örnek 1.17

Şekilde verilen sinyal akış şemasını kazanç formülü ile sadeleştirerek sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm:

Sinyal akış şemasında, 4 adet ileri besleme yolu vardır ve bu yollara ait kazanç ve delta değerleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$T1=\frac{5}{s^4} \quad , \quad \Delta 1=1$$

$$T2=\frac{6}{s^2} \quad , \quad \Delta 2=1+\frac{7}{s}$$

$$T3=\frac{10}{s^2} \quad , \quad \Delta 3=1$$

$$T4=12 \quad , \quad \Delta 4=1+\frac{7}{s}$$

Sinyal akış şemasının toplam delta değeri ise,

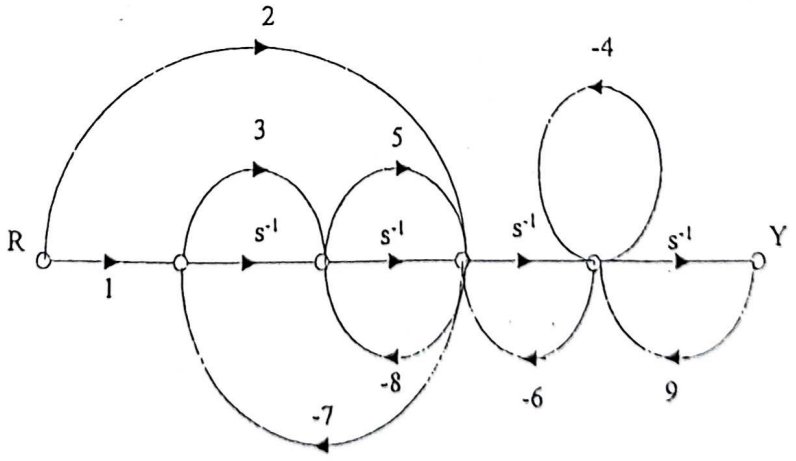
$$\Delta=1-(\frac{3}{s}+\frac{4}{s}+24+\frac{7}{s}+\frac{9}{s}+\frac{40}{s^2}+48)+(\frac{3}{s}\frac{7}{s}+\frac{3}{s}\frac{9}{s}+\frac{3}{s}.48+\frac{3}{s}\frac{40}{s^2}+\frac{4}{s}\frac{7}{s}+\frac{4}{s}\frac{9}{s}+24.\frac{7}{s}+24.\frac{9}{s})-(\frac{3}{s}\frac{7}{s}48)$$

Buna göre sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T=\frac{\frac{5}{s^4}+\frac{42}{s^3}+\frac{16}{s^2}+\frac{84}{s}+12}{73+\frac{120}{s^3}-\frac{852}{s^2}+\frac{505}{s}}=\frac{12s^4+84s^3+16s^2+42s+5}{73s^4+505s^3-852s^2+120s}$$

Örnek 1.18

Şekilde verilen sinyal akış şemasını kazanç formülü ile sadeleştirerek sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm:

Sinyal akış şemasında, 4 adet ileri besleme yolu vardır ve bu yollara ait kazanç ve delta değerleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$T1=\frac{1}{s^4} \quad , \quad \Delta 1=1$$

$$T2=\frac{5}{s^3} \quad , \quad \Delta 2=1$$

$$T3=\frac{3}{s^3} \quad , \quad \Delta 3=1$$

$$T4=\frac{15}{s^2} \quad , \quad \Delta 4=1$$

$$T5=\frac{2}{s} \quad , \quad \Delta 5=1+\frac{8}{s}+\frac{7}{s^2}+40+\frac{21}{s}+105$$

Sinyal akış şemasının toplam delta değeri ise,

$$\Delta=1-(-\frac{8}{s}-\frac{7}{s^2}-40-\frac{21}{s}-105-\frac{6}{s}-4-\frac{9}{s})+(4\frac{8}{s}+4\frac{7}{s^2}+4.40+4\frac{21}{s}+4.105+\frac{9}{s}\frac{8}{s}+\frac{9}{s}\frac{7}{s^2}+\frac{9}{s}.40+\frac{9}{s}\frac{21}{s}+\frac{9}{s}.105)$$

Buna göre sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T=\frac{\frac{1}{s^4}+\frac{22}{s^3}+\frac{73}{s^2}+\frac{292}{s}}{731+\frac{63}{s^3}+\frac{296}{s^2}+\frac{1465}{s}}=\frac{292s^3+73s^2+22s+1}{731s^4+1465s^3+296s^2+63s}$$

EKLER

A

A.1 Laplace Dönüşümü

Zamana bağlı bir f(t) fonksiyonunun $t \geq 0$ için laplace dönüşümü olan F(s), Denklem A.1 de verilen integral işlemi ile tanımlanır.

$$f(t) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad \text{A.1}$$

Burada, £- Laplace dönüşüm operatörü ve $s= \alpha+jw$ şeklinde tanımlanan karmaşık Laplace dönüşüm değişkenidir. Böylece Laplace dönüşümü ile bir fonksiyon, zaman bölgesinden s'nin bağımsız değişken olduğu karmaşık bir düzleme dönüştürülmüş olur. Ancak, bir f(t) fonksiyonun laplace dönüşümünün olabilmesi için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekir.

1. f(t) fonksiyonunun, $0 \leq t < \infty$ aralığında integrali alınabilir olmalıdır.
2. s' in belirli bir sonlu gerçek değeri $s=\alpha$ için integral aşağıdaki koşulu sağlamalıdır.

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t}\,dt < \infty \qquad \text{A.2}$$

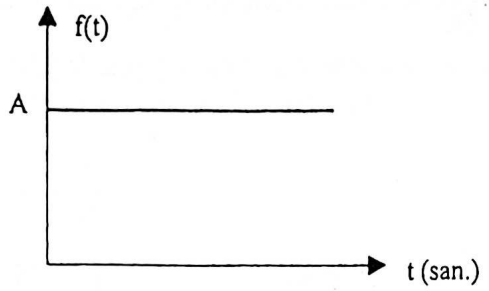
Burada ikinci koşul, f(t)'nin üstel bir fonksiyon olmasını gerektirir. Denklem A.1 de zaman, sıfırdan sonsuza kadar değiştiğinden ve $t<0$ için f(t) fonksiyonu sıfır kabul edildiğinden, bu denklem yoluyla tanımlanan dönüşüm tek taraflı laplace dönüşümü olarak bilinir. Denklem A.1 de integralin alt sınırı sıfır yerine $-\infty$'dan başlatılacak olursa dönüşüm iki taraflı laplace dönüşümü olarak söylenir. Denetim sistemleri gibi nedensel sistemlerde, $t \geq 0$ için bir giriş uygulandığından, ve sistemin geçmişteki durumu ancak başlangıç değerleri ile belirli olduğundan sadece tek taraflı laplace dönüşümleri kullanılır.

A.2 Test Sinyalleri ve Laplace Dönüşümleri

Denetim sistemlerini test etmek için bazı standart fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bunlar; basamak, darbe, ani darbe (impulse), rampa fonksiyonu ve sinusoidal fonksiyonlardır.

A.2.1 Basamak Fonksiyonu

Fiziksel anlamda bir eleman veya sisteme ani olarak sabit değere yükselen bir sinyal uygulamasını ifade eden ve matematiksel olarak $f(t) = A.u(t)$ şeklinde zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanan basamak fonksiyonu Şekil A.1 de verilmiştir.



$$f(t)=\begin{cases} A & t\geq 0 \quad ise \\ 0 & t<0 \quad ise \end{cases}$$

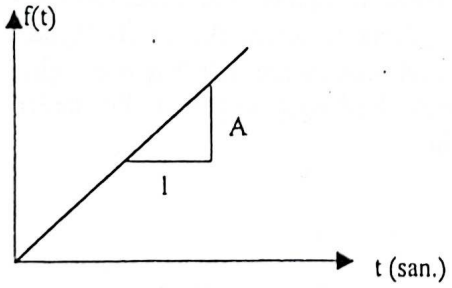
Şekil A.1 Basamak fonksiyonu ve tanımı

A=1 olması durumunda basamak fonksiyonu, *birim basamak fonksiyonu olarak söylenir ve u(t) sembolü ile gösterilir*. Basamak fonksiyonunun laplace dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F(s)=\pounds A.u(t)=\int_0^{\infty} A.e^{-st}\,dt=-\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=A.\frac{1}{s} \qquad \text{A.3}$$

A.2.2 Rampa Fonksiyonu

Fiziksel olarak zamana bağlı olarak sürekli artan bir sinyali ifade eden ve matematiksel olarak f(t)= A.t şeklinde tanımlanan rampa sinyali Şekil A.2 de verilmiştir.



$$f(t)=\begin{cases} A.t & t\geq 0 \quad ise \\ 0 & t<0 \quad ise \end{cases}$$

Şekil A.2 Rampa fonksiyonu ve tanımı

Burada A, rampa fonksiyonunun eğimini verir ve eğim A=1 ise bu sinyal, birim rampa sinyali olarak söylenir. Rampa fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$F(s)=\pounds A.t=\int_0^{\infty} Ate^{-st}\,dt \qquad \text{A.4}$$

olduğundan laplace integralinde kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa,

$u = t$ ve $dv = e^{-st}dt$

dersek,

$$\int_a^b udv = uv - \int_a^b vdu$$

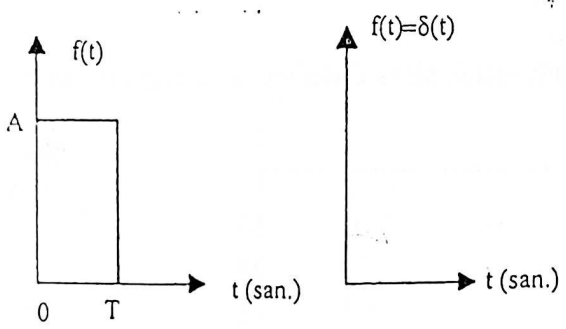
yararlanarak,

$$F(s) = \int_0^\infty Ate^{-st}dt = -\frac{Ate^{-st}}{s}\Big|_0^\infty - A\int_0^\infty \frac{-e^{-st}}{s}dt = -\frac{Ate^{-st}}{s}\Big|_0^\infty - \frac{Ae^{-st}}{s^2}\Big|_0^\infty = A.\frac{1}{s^2} \qquad \text{A.5}$$

elde edilir.

A.2.3 Ani darbe (impulse) fonksiyonu

Ani darbe fonksiyonu, t=0 anında genliği sonsuza giden ve t≠0 için genliği sıfır olan ancak t=0 ve sonsuz aralığındaki alanı (bazen şiddeti olarak da söylenir) A gibi bir sabit olan sinyaldir. Şekil A.3.b de verilen ani darbe fonksiyonu, şekil A.3.a da verilen darbe fonksiyonunun $\lim_{t\to\infty}$ değeri alınarak tanımlanabilir. Buna göre;



$$f(t) = \begin{cases} \delta(t) = 0 & t = 0 \ \ ise \\ \int_0^\infty \delta(t)dt = A & t \neq 0 \ \ ise \end{cases}$$

Şekil A.3 Ani darbe sinyali ve tanımı

Alanı A=1 olan ani darbe fonksiyonu *birim ani darbe fonksiyonu olarak söylenir ve δ(t) ile gösterilir.* Birim ani darbe fonksiyonunun en önemli özelliği, örnekleme özelliğidir ve aşağıdaki denklemle tanımlanır.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t).\delta(t-t_0) = \begin{cases} f(t0) & t_1 < t0 < t_2 \ \ ise \\ 0 & t_1 > t_0 \ , \ t_2 < t_0 \ \ ise \end{cases} \qquad \text{A.6}$$

t_0 da sürekli herhangi bir f(t) fonksiyonu için denklem A.6 ya göre birim ani darbe fonksiyonu, f(t) fonksiyonunun $t=t_0$ daki örneklenmiş değerini verir. Ani darbe fonksiyonun laplace dönüşümü, örnekleme özelliği kullanılarak kolayca bulunabilir.

$$F(s) = £A.\delta(t) = \int_0^{\infty} A.\delta(t)e^{-st}\,dt \qquad A.7$$

$f_1(t)=e^{-st}$ olarak tanımlanır ve örnekleme özelliği kullanılırsa,

$$F(s) = £A.\delta(t) = \int_0^{\infty} A.\delta(t)e^{-st}\,dt = A.e^{-s.t_0} = A.e^{-0} = A \qquad A.8$$

Birim ani darbe fonksiyonu için A=1 olduğu bilinmektedir.

A.2.4 Sinüs Fonksiyonu

Açısal frekansı w (rad/sn) olan bir sinüs fonksiyonu f(t) = A.sin(wt) olarak tanımlanır ve Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(s) = £[\sin wt] = \int_0^{\infty} (A.\sin wt)e^{-st}\,dt \qquad A.9$$

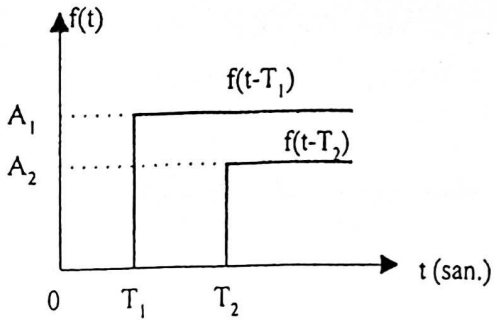
Sinüssel fonksiyonların üstel özdeşlikleri kullanılarak sinüs fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F(s) = \int_0^{\infty} A.\left(\frac{1}{2j}\right)\left(e^{-(s-jw)t} - e^{-(s+jw)t}\right)dt$$

$$F(s) = A.\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw}\right] = A.\frac{w}{s^2+w^2} \qquad A.10$$

A.2.5 Ötelenmiş Fonksiyonlar

Bir f(t) fonksiyonun T saniye ötelenmişi f(t-T) ile gösterilir. Şekil A.4 de ötelenmiş basamak fonksiyonları görülmektedir.



$$f(t-T_1)=\begin{cases}A_1 & t\geq T_1 \quad ise\\ 0 & t<T_1 \quad ise\end{cases}$$

$$f(t-T_2)=\begin{cases}A_2 & t\geq T_2 \quad ise\\ 0 & t<T_2 \quad ise\end{cases}$$

Şekil A.4 Ötelenmiş basamak sinyalleri ve tanımları

Ötelenmiş sinyallerin laplace dönüşümleri de laplace integrali kullanılarak alınabilir ve sonuçta bir f(t) sinyalinin ötelenmişi f(t-T) ise ötelenmiş sinyalin laplace dönüşümünün,

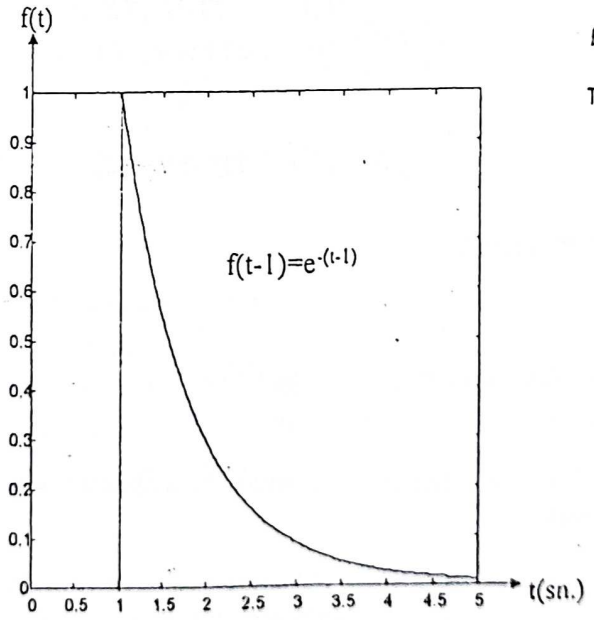
$$\pounds f(t-T)=e^{-Ts}\cdot F(s) \qquad \text{A.11}$$

olduğu görülebilir. Burada, F(s), t=0 da başlayan f(t) sinyalinin Laplace dönüşümüdür.

Örnek A.1

Şekil 1.17 de verilen ötelenmiş üstel fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz

ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) 23 58 . Hazar V.D. 253 014 9817



Şekil A.5 Ötelenmiş üstel fonksiyon

Çözüm:

$$£f(t-1) = \int_0^{\infty} f(t-1)e^{-st}\,dt$$

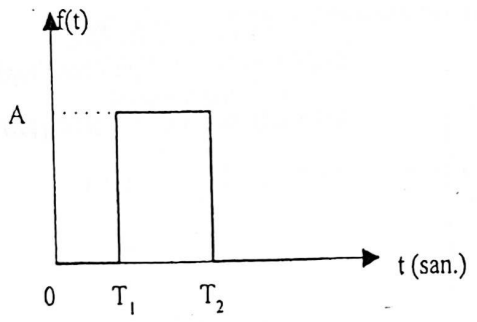
t<1 için f(t-1) sinyalinin değeri sıfır olduğundan laplace integralinin sınırları aşağıdaki gibi değiştirilebilir.

$$£f(t-1) = \int_1^{\infty} f(t-1)e^{-st}\,dt = \int_1^{\infty} e^{-(t-1)}e^{-st}\,dt = e\int_1^{\infty} -\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t} = e.e^{-1}.e^{-s}\frac{1}{s+1} = e^{-s}\frac{1}{s+1}$$

Bulunan sonucun denklem A.11 i sağladığı görülmektedir.

A.2.6 Darbe fonksiyonu

Darbe fonksiyonu fiziksel olarak, kısa bir zaman süresi için sabit bir değere sahip olan ve bu süre dışında değeri sıfır olan bir sinyali ifade eder. Şekil A.6 da verilen darbe fonksiyonunun matematiksel tanımı ve ötelenmiş basamak sinyalleri cinsinden yazılışı aşağıdaki gibi ifade edilir.



$$f(t) = \begin{cases} A & T1 < t < T2 \text{ ise} \\ 0 & t < T1 \text{ ve } t > T2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(t) = A.\{u(t-T1) - u(t-T2)\}$$

Şekil A.6 Darbe fonksiyonu ve tanımı

Darbe fonksiyonunun laplace dönüşümü ötelenmiş basamak fonksiyonları cinsinden ifadesi dikkate alınarak kolayca belirlenebilir.

$$F(s) = £[f(t)] = A.£\{u(t-T1) - u(t-T2\} = A\left\{e^{-sT1}.\frac{1}{s} - e^{-sT2}.\frac{1}{s}\right\} \qquad \text{A.12}$$

A.3 Laplace Dönüşüm Tablosu

Denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında Laplace dönüşüm integralini kullanarak fonksiyonların laplace dönüşümlerini bulmak yerine hazır laplace dönüşümü tablosu ile laplace dönüşümünün bazı özelliklerini kullanmak daha uygun olmaktadır. Bu amaçla tablo A.1'de yaygın olarak kullanılan bazı fonksiyonların laplace dönüşümleri verilmiştir. Tablo A.1 den hem laplace dönüşümlerini ve hem de ters laplace dönüşümlerini bulmak için yaralanılabilir.

Fonksiyonun adı	**f(t)**	**F(s)**
1. Birim anidarbe	$\delta(t)$	1
2.Birim basamak	u(t)	1/s
3. Birim rampa	t	$1/s^2$
4. Üstel	e^{-at}	$1/(s+a)$
5. sinüs	sin wt	$w/(s^2+w^2)$
6. cosinüs	cos wt	$s/(s^2+w^2)$
7. Polinom	t^n (n= 1,2,3,4,..)	$n!/(s^{n+1})$
8. Tekrarlı kök	$t^n e^{-at}$ (n= 1,2,3,4...)	$n!/(s+a)^{n+1}$
9. Sönümlü sinüs	e^{-at} sin wt	$w/((s+a)^2+w^2)$
10. Sönümlü cosinüs	e^{-at} cos wt	$(s+a)/((s+a)^2+w^2)$

A.4 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin alınması ve doğrusal – zamanla değişmeyen sistemlerin Laplace dönüşümü ile çözümünde oldukça yararlı olan çeşitli özellikler vardır. Bu özellikler, denetim sistemlerinin analizi açısından oldukça önemlidir ve aşağıda özetle verilmiştir.

1-) Doğrusallık Özelliği

Laplace dönüşümü; (t) ile gösterilen zaman bölgesinde tanımlanan fonksiyonlar ile "s" karmaşık sayı düzleminde tanımlanan fonksiyonlar arasında gerçekleştirilen doğrusal bir dönüşümdür. Bu nedenle, bir f(t) sinyalinin Laplace dönüşümü F(s) ile gösterildiğine göre,

$$f(t) = a.f1(t) + b.f2(t) \quad ise \quad F(s) = a.F1(s) + b.F2(s) \qquad \text{A.13}$$

dir. Burada, a ve b- sabit katsayılardır. Bu özellik, toplamlar yada farklar halinde bulunan fonksiyonların laplace dönüşümlerinin ayrı ayrı alınabileceğini göstermektedir.

2-) Üstel ile Çarpma

Bir fonksiyon, birden fazla fonksiyonun zaman bölgesinde çarpımından oluşabilir. Bu tür fonksiyonların Laplace dönüşümü, çarpımı oluşturan fonksiyonların her birinin ayrı ayrı laplace dönüşümü alınarak belirlenemez. Üstel bir fonksiyonla çarpım durumunda bulunan f1(t) gibi bir fonksiyonun laplace dönüşümü aşağıdaki özellik ile tanımlanır.

$$f(t) = e^{\pm at}.f_1(t) \quad ise \quad F(s) = F_1(s \mp a) \qquad \text{A.14}$$

Bu özellik, üstel ile çarpım durumunda bulunan fonksiyonun laplace dönüşümü alındıktan sonra s yerine s+a konulacağını ifade eder.

3-) Rampa ile çarpma

Rampa fonksiyonu ile çarpım durumunda bulunan f1(t) gibi bir fonksiyonun laplace dönüşümü aşağıdaki özellik ile tanımlanır.

$$f(t) = t^n.f_1(t) \quad ise \quad F(s) = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}F_1(s) \qquad \text{A.15}$$

Örnek A.2:

$f(t) = e^{-2t}\, t\, Sin(4t)$ sinyalinin laplace dönüşümünü alınız.

Çözüm:

$f_1(t) = t\, Sin(4t)$

olarak gösterilirse özellik 2 kullanılarak,

$F(s) = F1(s+2)$

olacaktır. Diğer taraftan, $f_2(t) = Sin(4t)$ ile gösterilirse,

$$F1(s) = -\frac{d}{ds}F2(s) = -\frac{d}{ds}\frac{4}{s^2+16} = \frac{8s}{s^2+16}$$

sonuç olarak,

$$F(s) = \frac{8(s+2)}{\{(s+2)^2+16\}^2}$$

4-) Türevin laplace dönüşümü

Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonu türevinin laplace dönüşümü aşağıdaki gibi belirlenir.

$$£\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}.f(0) - s^{n-2}.f'(0) \ldots\ldots\ldots\ldots - f^{n-1}(0) \qquad \text{A.16}$$

Burada f(0), f'(0).... $f^{n-1}(0)$,sırasıyla f(t) fonksiyonu ve onun türevlerinin başlangıç değerleri olup t'nin artı değerden sıfıra yaklaşımının limitleri olarak tanımlanırlar.

5-) İntegralin laplace dönüşümü

Bir f(t) fonksiyonunun integralinin laplace dönüşümü aşağıdaki özellikle tanımlanır.

$$£\int_0^t f(t)d(t) = \left[\frac{F(s)}{s}\right] \qquad \text{A.17}$$

Örnek A.3

Verilen integro-diferansiyel denklemin laplace dönüşümünü alarak s- bölgesinde Y(s) çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) + \int_0^t y(t)dt = e^{-2(t-4)} \quad , \; y(0)=1$$

Çözüm:

Verilen denklemin laplace dönüşümü alınırsa,

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) + \frac{Y(s)}{s} = e^{-4s}\,\frac{1}{s+2}$$

Buradan Y(s) çözümü yalnız bırakılırsa,

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + se^{-4s}}{(s+2)(s^2+3s+1)}$$

bulunacaktır.

6-) İlk değer teoremi

Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonunun başlangıç değeri, aşağıdaki denklemle zaman bölgesinde belirlenebileceği gibi s- bölgesinde de belirlenebilir.

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad \text{A.18}$$

7-) Son değer teoremi

Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonun son değeri, fonksiyonun bir son değere sahip olması koşulu ile aşağıdaki özellikle tanımlanır.

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad \text{A.19}$$

Örnek A.4

Verilen fonksiyonun ilk ve son değerlerini hem zaman hem de s- bölgesinde belirleyiniz.

$$f(t) = 1 - e^{-2t}.Sin(5t + \frac{\pi}{6})$$

Çözüm:

Zaman bölgesinde fonksiyonun ilk ve son değerleri,

$$f(0) = \underset{t\to 0}{Lim}\, f(t) = 1 - Sin(30) = 0.5$$

$$f(\infty) = \underset{t\to\infty}{Lim}\, f(t) = 1 - 0 = 1$$

f1(t)=Sin(5t+30) ile gösterilirse verilen fonksiyonun laplace dönüşümü,

$$F(s) = \frac{1}{s} - F1(s+2)$$

olacaktır.

$$f1(t) = Sin(5t).Cos(30) + Cos(5t).Sin(30)$$

olduğundan,

$$F(s) = \frac{1}{s} - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{5}{(s+2)^2+25} + \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+25}\right]$$

elde edilecektir. İlk ve son değer teoremleri uygulanırsa,

$$f(0) = \underset{s\to\infty}{Lim}\, sF(s) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$f(\infty) = \underset{s\to 0}{Lim}\, sF(s) = 1 - 0 = 1$$

8-) Zaman bölgesinde ölçekleme özelliği

f(t) fonksiyonunun laplace dönüşümü F(s) ise $f(\frac{t}{a})$ fonksiyonunun laplace dönüşümü;

$$£\ f(\frac{t}{a}) = a.F(s) \qquad \text{A.20}$$

9-) Frekans bölgesinde ölçekleme özelliği

Laplace dönüşüm F(s) olan fonksiyon zaman bölgesinde f(t) ise s- bölgesinde $F(\frac{s}{a})$ olarak ölçeklendirilen fonksiyonun ters laplace dönüşümü (zaman bölgesindeki karşılığı,

$$£^{-1}\ F(\frac{s}{a}) = a.f(a.t) \qquad \text{A.21}$$

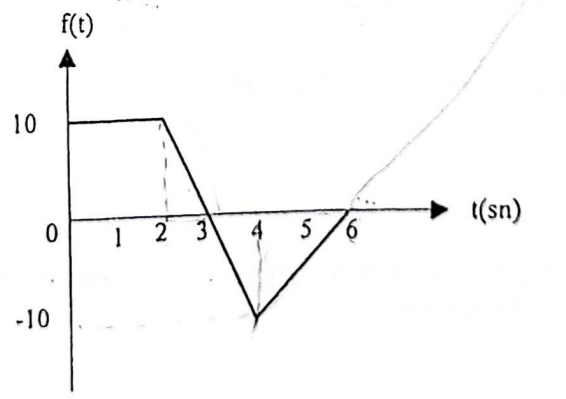
10-) Öteleme Özelliği

Bir f(t) fonksiyonunun laplace dönüşümü F(s) ise bu fonksiyonun T kadar ötelenmişi olan f(t-T) fonksiyonunun $t \geq T$ için laplace dönüşümü;

$$£\ f(t-T) = e^{-sT}.F(s) \qquad \text{A.22}$$

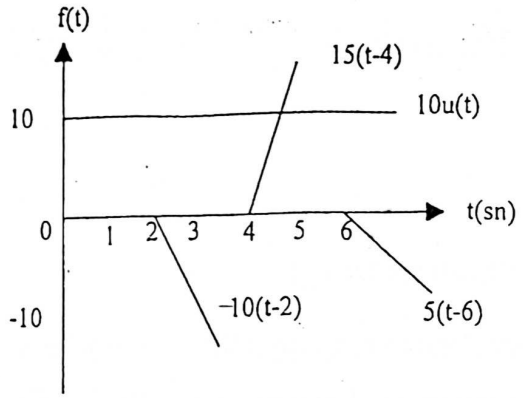
Örnek A.5

Şekilde verilen sinyali ötelenmiş temel test sinyallerinin toplamı/farkı şeklinde yazarak sinyalin laplace dönüşümün bulunuz.



Çözüm:

Verilen sinyal, ötelenmiş basamak ve rampa sinyalleri cinsinden şekildeki gibi çizilebilir.



Bu şekle göre ötelenmiş sinyaller cinsinden verilen f(t) fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(t) = 10u(t) - 10(t-2)u(t-2) + 15(t-4)u(t-4) - 5(t-6)u(t-6)$$

Buna göre fonksiyonun laplace dönüşümü,

$$F(s) = 10\frac{1}{s} - 10\frac{1}{s^2}e^{-2s} + 15\frac{1}{s^2}e^{-4s} - 5\frac{1}{s^2}e^{-6s}$$

olarak bulunur.

11-) s bölgesinde çarpım halinde olan fonksiyonların ters laplace dönüşümü

$F_1(s)$ ve $F_2(s)$ şeklinde s-bölgesinde çarpım halinde bulunan bir fonksiyonun ters laplace dönüşümü katlı integraller yardımı ile bulunur.

$$\pounds^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \qquad \text{A.23}$$

Örnek A.6

s-bölgesinde çarpım durumunda verilen aşağıdaki fonksiyonun ters laplace dönüşümünü katlama integrali yardımıyla bulunuz.

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Çözüm:

Verilen fonksiyonun çarpanlarını F1(s) ve F2(s) olarak ayırırsak,

$F1(s)\frac{1}{s+1}$ ve $F2(s)=\frac{1}{s+2}$

Çarpanların ters laplace dönüşümleri ise,

$f1(t)=e^{-t}$ ve $f2(t)=e^{-2t}$

olacaktır. Bulunan zaman bölgesindeki fonksiyonlara katlama integrali uygulanırsa,

$$f(t)=\int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau=e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^{-t}-e^{-2t}$$

olarak elde edilir. Verilen fonksiyon, basit kesirlerine ayrılarak ters laplace dönüşümü de alınsa aynı sonuç bulunacaktır.

12-) Zamanda ileri öteleme

Ötelenmiş birim basamak fonksiyonu ile çarpım durumunda olan bir f1(t) fonksiyonunun laplace dönüşümü aşağıdaki gibi bu fonksiyonun zamanda ileri ötelenmişinin laplace dönüşümü ile alınabilir.

$f(t)=f_1(t)u(t-t_0)$ ise $F(s)=e^{-st_0}Lf_1(t+t_0)$

Örnek A.7

$f(t)=t.e^{-2t}u(t-3)$ fonksiyonunun laplace dönüşümünü alınız.

Çözüm:

$f1(t)=tu(t-3)$

olarak gösterilirse özellik 12 ye göre,

$$F_1(s)=e^{-3s}L(t+3)=e^{-3s}(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s})$$

olacaktır. Buradan,

$$F(s)=e^{-3(s+2)}(\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{3}{s+2})$$

bulunur.

A.5 Ters Laplace Dönüşümü

Ters laplace dönüşüm, s-bölgesinde verilen bir fonksiyonun zaman bölgesine dönüşümünü ifade eder ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\pounds^{-1}[F(s)] = f(t) \qquad \text{A.24}$$

"s" bir karmaşık sayı olduğundan verilen bir F(s) fonksiyonunun ters laplace dönüşümü karmaşık "s" düzleminde tanımlanan bir çevresel integral ile alınabilir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-\infty}^{\alpha+\infty} e^{st} F(s)ds \qquad \text{A.25}$$

burada α bir sabittir. Ancak, denklem A.25 i kullanarak bir F(s) fonksiyonunun ters laplace dönüşümünü almak, matematiksel olarak karmaşık işlemlere ihtiyaç duyar. Bunun yerine, verilen F(s) fonksiyonu, ters laplace dönüşümleri doğrudan alınabilecek basit kesirlere ayrılarak bütün bir fonksiyonun ters laplace dönüşümünü almak daha kolaydır.

Kısmi kesirlere ayırma yöntemi

Ters laplace dönüşümü alınması gereken bir F(s) fonksiyonu, basit fonksiyonlar dizisi şeklinde yeniden düzenlenebilir.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_n(s) \qquad \text{A:26}$$

Daha sonra da her bir basit kesrin ayrı ayrı ters laplace dönüşümü alınabilir. Sonuçta toplam zaman bölgesi fonksiyonu f(t), basit zaman bölgesi fonksiyonlarının toplamı olarak elde edilir.

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\ldots f_n(t) \qquad \text{A:27}$$

Genel olarak bir F(s) fonksiyonu, s'in fonksiyonları olan iki polinomun oranı şeklindedir.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z1).(s+z2)\ldots.(s+zm)}{(s+p1).(s+p2)\ldots.(s+pn)} \qquad \text{A.28}$$

Burada, payın kökleri olan z_1, z_2 ..... z_m değerleri, F(s) fonksiyonunu sıfır yapan değerler olduğundan fonksiyonun sıfırları olarak ve paydanın kökleri olan p_1 , p_2..... p_n değerleri ise fonksiyonu sonsuz yapan değerler olduğundan fonksiyonun kutupları olarak söylenir. Denklem A.28 ile tanımlanan bir fonksiyon, payda polinomunun köklerinin durumuna (fonksiyonun

kutupları) göre basit kesirlerine ayrılabilir ve bu kökler gerçek ve ayrık, gerçek ve katlı yada karmaşık kökler şeklinde olabilir.

A.5.1 Gerçek ve ayrık kök durumu

Eğer F(s) fonksiyonunun paydasındaki D(s) polinomunun tüm kökleri, birbirinden farklı (ayrık) ve gerçek kök ise F(s) fonksiyonu aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$F(s)=\frac{N(s)}{\sum_{i=1}^{n}(s+p_i)}=\frac{N(s)}{(s+p1)(s+p2).....(s+pn)}=\frac{K1}{s+p1}+\frac{K2}{s+p2}+.....+\frac{Kn}{s+pn} \qquad \text{A.29}$$

Bu basit kesirlere göre fonksiyonun ters laplace dönüşümü,

$$f(t)=K_1.e^{-p_1.t}+K_2.e^{-p_2.t}+.....K_n.e^{-p_n.t} \qquad \text{A.30}$$

Basit kesirlerdeki her bir kesrin katsayıları özdeşlikle bulunabileceği gibi Heaviside açılımına göre aşağıdaki ifadeden de belirlenebilir.

$$K_i=\lim_{s\to p_i}\{(s-p_i)F(s)\} \qquad \text{A.31}$$

Örnek A.8

$F(s)=\dfrac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s-3)}$ fonksiyonunun ters laplace dönüşümünü bulunuz?

Çözüm

F(s) fonksiyonu, $s_1=-1$, $s_2=-2$, $s_3=3$ de gerçek ve farklı üç kutba sahip olduğundan aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$F(s)=\frac{K_1}{(s+1)}+\frac{K_2}{(s+2)}+\frac{K_3}{(s-3)}$$

Burada, katsayılar,

$$K_1=\lim_{s\to-1}\left[(s+1)\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right]=-\frac{1}{4}$$

$$K_2=\lim_{s\to-2}\left[(s+2)\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right]=\frac{2}{5}$$

$$K_3=\lim_{s\to3}\left[(s-3)\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right]=\frac{17}{20}$$

Bulunan katsayılara göre verilen F(s) fonksiyonunun ters laplace dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$f(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{17}{20}e^{3t}$$

A.5.2 Gerçek ve Katlı kök durumu

F(s) fonksiyonunun payda polinomunun s=p noktasında n tane tekrarlanan bir kökü varsa,F(s) fonksiyonu aşağıdaki gibi basit kesirlere ayrılabilir.

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p)^n} = \frac{K1}{(s+p)^n} + \frac{K2}{(s+p)^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{Kn}{s+p} \qquad \text{A.32}$$

Bu basit kesirlere göre fonksiyonun ters laplace dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$f(t) = K1.\frac{t^{n-1}}{n!}.e^{-pt} + K2.\frac{t^{n-2}}{(n-1)!}.e^{-pt} + \ldots\ldots + Kn.e^{-pt} \qquad \text{A.33}$$

Basit kesirlerin katsayıları yine özdeşlikle bulunabileceği gibi Heaviside açılımına göre aşağıdaki genel ifade ile de belirlenebilir.

$$K_{i+1} = \lim_{s\to p} \frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\left[(s-p)^n F(s)\right] \quad \text{i=0,1,2,.....n-1} \qquad \text{A.34}$$

Örnek A.9

Aşağıda verilen fonksiyonun ters laplace dönüşümünü bulunuz.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$$

Çözüm

Fonksiyonun basit kesirlerine ayrılmış hali ve basit kesirlerinin katsayıları aşağıda verilmiştir.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{K1}{(s+1)^3} + \frac{K2}{(s+1)^2} + \frac{K3}{(s+1)} + \frac{A}{(s+2)}$$

$$A = \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}\right] = -1$$

$$K1 = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)^3\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}\right] = 2$$

$$K2 = \lim_{s\to -1}\left[\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left((s+1)^3\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}\right)\right] = -1$$

$$K3 = \lim_{s\to -1}\left[\frac{1}{2!}\frac{d}{ds}((s+1)^3\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)})\right] = 2$$

Bulunan katsayılara göre F(s) fonksiyonunun ters laplace dönüşümü,

$$f(t) = 2.\frac{1}{2!}t^2e^{-t} - te^{-t} + 2.e^{-t} - e^{-2t}$$

elde edilir.

A.5.3 Karmaşık kök durumu

Bir polinomun karmaşık kökleri her zaman eşlenik çiftler halinde bulunur. Buna göre eğer verilen bir F(s) fonksiyonunun payda polinomu D(s) in kökleri karmaşık ise kökleri $s_{1,2}=a\pm jb$ gibi bir karmaşık eşlenik kök çiftine sahip olacaktır. Bu durumda, karmaşık kökler de gerçek köklerde olduğu gibi basit kesirlere ayrılabilir ancak karmaşık köklerde basit kesirlerin katsayılarının da eşlenik olduğu yani K2=K1* olduğu hatırlanmalıdır.

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+a+jb)(s+a-jb)} = \frac{K1}{(s+a+jb)} + \frac{K2}{(s+a-jb)} \qquad \text{A.35}$$

Basit kesirlerin laplace dönüşümü alınırsa,

$$f(t) = K1.e^{-(a+jb).t} + K2.e^{-(a-jb).t} \qquad \text{A.36}$$

elde edilir. Burada, K1 ve K2 karmaşık eşlenik köklerle ilgili karmaşık sabitler olup aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K1 = \lim_{s\to -a-jb}\left((s+a+jb)F(s)\right) = \frac{1}{-2jb}\lim_{s\to -a-jb} F1(s) \qquad \text{A.37.a}$$

$$K_2 = \lim_{s\to -a+jb}\left((s+a-jb)F(s)\right) = \frac{1}{2jb}\lim_{s\to -a-jb} F1(s) \qquad \text{A.37.b}$$

Burada, F1(s)- verilen F(s) fonksiyonundan karmaşık kökler çıkarıldıktan sonra geriye kalan fonksiyonu göstermektedir. F1(-a-jb) ve F1(-a+jb) karmaşık eşlenik sayılar olduğundan bu vektörler genlik ve açılarına göre tanımlanabilir. Buna göre,

$$K1 = \frac{1}{-2jb}|F1(-a-jb)|.e^{-j\alpha} \qquad \text{A.38.a}$$

$$K_2 = \frac{1}{2jb}|F1(-a+jb)|.e^{j\alpha} \qquad \text{A.38.b}$$

Burada α- karmaşık F1 sayısının açısıdır ve s=a—jb kök değeri için bu sayının açısının -α, ve s=-a+jb kök değeri için ise bu sayının açısının +α olarak tanımlandığı denklem A.38 den görülmektedir. Bulunan K1 ve K_2 katsayıları denklem A.36 da yerine yazılır,

$$f(t) = \frac{1}{b}|F1(-a-jb|.e^{-at}.\frac{e^{j(bt+a)} - e^{-j(bt+a)}}{2j} \qquad \text{A.39}$$

ve düzenlenirse,

$$f(t) = \frac{1}{b}|F1(-a-jb)|e^{-at}.Sin(bt+\alpha) \qquad \text{A.40}$$

sonucu elde edilir.

Örnek A.10

$F(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$ fonksiyonunun ters laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

Paydanın kökleri; $s_1 = -2$ ve $s_{2,3} = -1 \pm j$ şeklinde karmaşık kök çifti mevcuttur. Buna göre;

$$F(s) = \frac{K1}{s+1-j} + \frac{K2}{s+1+j} + \frac{A}{s+2}$$

Ters laplace formülünü uygularsak;

$$f(t) = \frac{1}{b}\left[F1(a+jb)\right]e^{-at}.\sin(bt+\alpha) + A.e^{-2t}$$

buradan;

$$A = \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+2)}\right] = -\frac{1}{2}$$

Karmaşık kökler için,

$$F1(-a+jb) = \lim_{s\to -1+j}\left[(s^2+2s+2)\frac{s+1}{(s^2+2s+2)(s+2)}\right] = \frac{j}{1+j}$$

buradan F1 karmaşık değerin genlik ve fazı,

$$|F1(-a+jb)| = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

yada s=-1-j kök değeri için,

$$F1(-a-jb) = \lim_{s\to -1-j}\left[(s^2+2s+2)\frac{s+1}{(s^2+2s+2)(s+2)}\right] = \frac{-j}{1-j}$$

ve açısı ise,

$$-\alpha = -\frac{\pi}{2} - (-\arctan\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$$

olarak elde edilecektir. Bulunan değerler yerine konursa;

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin e^{-t}\sin(t+\frac{\pi}{4})$$

elde edilir.

Örnek A.11

Aşağıda verilen fonksiyonun ters laplace dönüşümünü bulunuz.

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+4}$$

Çözüm

Verilen fonksiyonun kutuplarının karmaşık olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu fonksiyon, yukarıda açıklandığı gibi karmaşık köklerine ayrılıp elde edilen karmaşık basit kesirlerin ters laplace dönüşümü zaman bölgesine çevrilebilir. Ancak burada, fonksiyonun kutuplarının karmaşık olduğu görüldüğüne ve karmaşık kutupların ise zaman bölgesinde üstel ile sinüssel bir fonksiyonun çarpımı olduğu bilindiğine göre verilen F(s) fonksiyonu s bölgesinde üstel ile sinüssel bir fonksiyonunun çarpımı haline getirilip ters laplace dönüşümü daha kolay alınabilir. Buna göre F(s) fonksiyonu düzenlenirse,

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Buradan verilen fonksiyonun ters laplace dönüşümü,

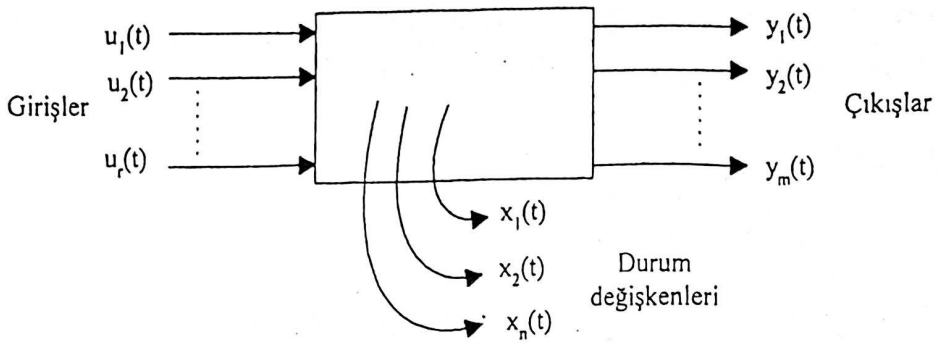
$$f(t) = e^{-t}.Cos(\sqrt{3}.t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}.Sin(\sqrt{3}.t)$$

elde edilir.

A.6 Durum Uzay Modelleri

Transfer fonksiyonu modellerine göre denetim sistemlerinin analiz ve tasarımını inceleyen klasik denetim teorisi sadece doğrusal, zamanla değişmeyen tek girişli ve tek çıkışlı (SISO) sistemlere uygulanır. Sistemler geliştirildikçe karmaşıklığı da artmakta ve bu sistemlerin denetimleri de doğal olarak daha karmaşık hale gelmektedir. Gelişen sistemler; tek giriş ve tek çıkış yerine çok giriş ve çok çıkışa sahip olabilirler ve zamanla değişen ve doğrusal olmayan dinamik davranışlar gösterebilirler. Bunun sonucu olarak da bu sistemlerin geleneksel denetim teorisine göre analiz ve tasarımları oldukça zor hatta imkansız hale gelmektedir.

Denetim sistemlerinin performansındaki artan istekleri karşılama gereği karmaşık denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında yeni bir yaklaşım olan ve durum uzay modelleri ile sistemlerin analiz ve tasarımını esas alan modern denetim teorisinin gelişmesine neden olmuştur. Modern denetim teorisi doğrusal yada doğrusal olmayan, zamanla değişen yada zamanla değişmeyen ve çok girişli - çok çıkışlı sistemlere (MIMO) de uygulanabilmektedir. Ayrıca Modern denetim teorisi esas olarak zaman bölgesinde geliştirilirken klasik denetim teorisi karmaşık frekans bölgesinde ele alınmaktadır. Modern denetim teorisinin esası durum kavramına dayanır. Şekil A.7 de, çok girişli-çok çıkışlı bir sistemin blok gösterilişi verilmiştir.



Şekil A.7 çok girişli-çok çıkışlı bir sistemin blok şeması

Şekil A.7 de verilen blok şema üzerinde aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

Sistem giriş vektörü

Sistemden alınacak tepkiyi üretmek üzere sisteme bağımsız bir kaynaktan uygulanan giriş sinyallerinin oluşturduğu vektördür. Şekil A.7 de, u_1, u_2, ... u_r olmak üzere sisteme r adet bağımsız giriş uygulanmaktadır. Bu girişlerin oluşturduğu rx1 boyutlu vektör **u(t)** ile gösterilirse sistem giriş vektörü aşağıdaki gibi yazılır.

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ . \\ . \\ u_r(t) \end{bmatrix} \qquad \text{A.41}$$

Sistem çıkış vektörü

Sisteme uygulanan girişlere sistemin verdiği tepkileri gösteren bağımlı çıkış değişkenlerinin oluşturduğu vektördür. Şekil A.7 de, y_1, y_2, ... y_m olmak üzere sisteme m adet bağımlı çıkış bulunmaktadır. Bu çıkışların oluşturduğu mx1 boyutlu vektör **y(t)** ile gösterilirse sistem çıkış vektörü aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad \text{A.42}$$

Durum Değişkenleri

Bir dinamik sistemin durum değişkenleri, dinamik sistemin durumunu belirleyen en küçük değişkenleri olarak tanımlanabilir. Öyle ki, $t>=t_0$ için verilen sistem girişleri ile birlikte $t=t_0$ anındaki durum değişkelerinin bilgileri yardımıyla, sistemin $t>=t_0$ için dinamik davranışları tam olarak belirlenebilmektedir. Bir dinamik sistemin dinamik davranışını tanımlamak için en az n

tane ($x_1,x_2,....x_n$) değişkenine ihtiyaç duyuluyorsa bu n tane değişken durum değişkenleridir ve durum değişkenlerinin sayısı, aynı zamanda sistemin derecesini de göstermektedir.

Durum Vektörü

Bir dinamik sistemin n tane durum değişkeni varsa bu n tane durum değişkeni, bir **x** vektörünün n tane bileşeni olarak dikkate alınabilir. Bu durumda nx1 boyutlu **x(t)** vektörüne durum vektörü denir aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \text{A.43}$$

Durum Uzayı

Koordinat eksenleri $x_1,x_2,....x_n$ gibi n tane durum değişkeninden meydana gelen n boyutlu uzay, durum uzayı olarak söylenir. Herhangi bir durum , durum uzayında bir nokta ile gösterilebilir.

Durum Uzay Denklemleri

Şekil A.7 de verildiği gibi dinamik sistemlerin durum uzay modellerinde 3 değişken bulunur. Bunlar giriş değişkenleri, çıkış değişkenleri ve durum değişkenleridir. Şekil A.7 de verilen değişkenlerin boyutlarına göre en genel biçimiyle zamanla değişen ve doğrusal olmayan bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ...x_n ; u_1, u_2, ...u_r ; t)$$

. A.44

.

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ...x_n ; u_1, u_2, ...u_r ; t)$$

ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) 2.. 5.. Hazar V.D. 253 014 9817

Sitemin çıkış denklemleri ise,

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, ...x_n ; u_1, u_2, ...u_r ; t)$$

. A.45

.

$$y_m = g_m(x_1, x_2, ...x_n ; u_1, u_2, ...u_r ; t)$$

gibi tanımlanır. Bu denklemler matris düzeninde yazılırsa doğrusal olmayan ve zamanla değişen bir sistemin durum uzay modeli aşağıdaki genel biçimde yazılabilir.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \text{A.46}$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Denklem A.46 dan, bir dinamik sistemin; birinci dereceden diferansiyel denklemler şeklinde bir durum denklemi ile ve cebirsel bir çıkış denklemi ile modellenebileceği görülmektedir. Doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için Denklem A.46 aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad \text{A.47}$$

Burada, A, B, C ve D matrisleri, katsayı matrisleri olup giriş, çıkış ve durum vektörlerinin boyutlarına uygun olarak aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & . & b_{2r} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & b_{nr} \end{bmatrix}_{nxr} \qquad \text{A.48}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & . & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & . & d_{2r} \\ . & . & . & . \\ d_{m1} & d_{m2} & . & d_{mr} \end{bmatrix}_{mxr} \qquad \text{A.49}$$

Örnek A.12

Katsayı matrislerine rastgele değerler vermek üzere iki girişli, iki çıkışlı ve üçüncü dereceden bir sistemin durum denklemini ve çıkış denklemini matris düzeninde yazınız.

Çözüm

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

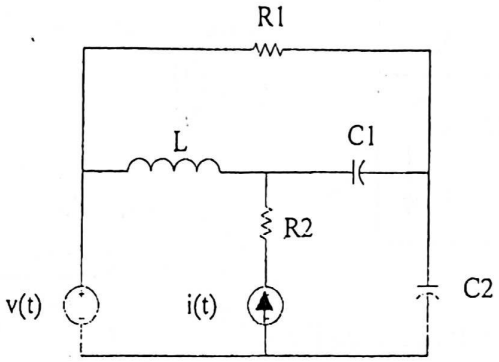
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

A.6.1 Elektrik Devrelerinin Durum Uzay Modelleri

Basit devrelerin durum denklemleri temel devre yasalarının uygulanmasıyla elde edilebilir. Ancak, karmaşık devrelerde sistematik bir yaklaşımla durum denklemlerinin elde edilmesi gereklidir. Örnek A.13 de, temel devre yasaları kullanılarak bir elektrik devresinin durum denklemlerinin elde edilişi verilmiştir.

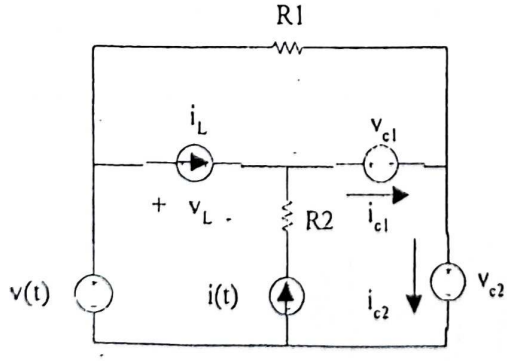
Örnek A.13

Şekilde verilen elektrik devresinin durum denklemlerini temel devre yasalarından yararlanarak çıkarınız.



Çözüm

Temel devre yasalarından yararlanarak bir devrenin durum denklemlerini çıkarabilmek için öncelikle kondansatörler yerine gerilim kaynakları, bobinler yerine de akım kaynakları bağlanarak sadece kaynak ve dirençlerden oluşan bir elektrik devresi elde edilir. Bu devrede, kondansatör akımları (ic1 ve ic2) ile bobin gerilimi (vL) nin değerleri herhangi bir devre teoremi yardımı ile bulunarak dinamik elemanların uç denklemlerinde yerine yazılarak durum denklemleri çıkarılır. Şekilde verilen devrede dinamik elemanlar yerine kaynaklar yerleştirilirse aşağıdaki devre elde edilecektir.

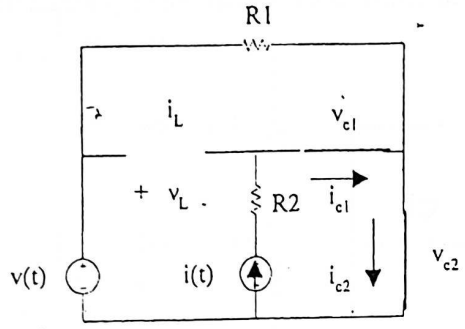


Şekildeki kaynaklardan ve dirençlerden oluşan devrede, kondansatör akımları (ic1 ve ic2) ile bobin gerilimi (vL), diğer kaynaklar ve dirençler cinsinden herhangi bir devre teoremi yardımı ile bulunabilir ve bulunan bu değerlere göre devrenin durum denklemi,

$$\frac{d}{dt}v_{c1} = \frac{1}{c_1}i_{c1} \quad , \quad \frac{d}{dt}v_{c2} = \frac{1}{c_2}i_{c2} \quad , \quad \frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}v_L$$

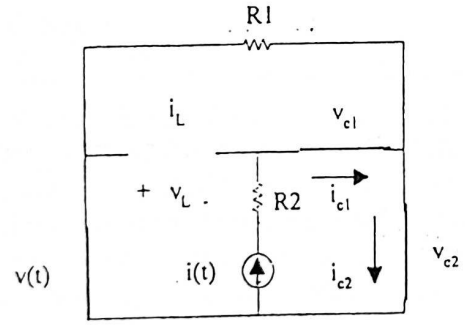
elemanların uç denklemlerinde yerine yazılarak bulunur. O halde 5 adet kaynaktan oluşan devreye toplamsallık teoremi uygulanırsa,

a-) Sadece gerilim kaynağı v(t) devrede iken,



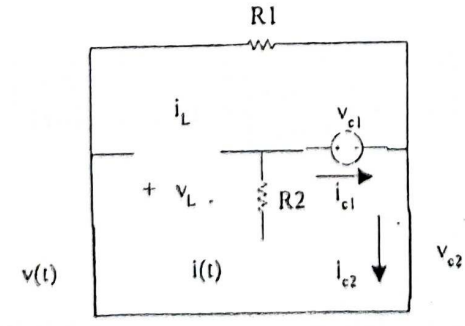
$$v_L = v(t)$$
$$i_{c1} = 0$$
$$i_{c2} = \frac{v(t)}{R1}$$

b-) Sadece akım kaynağı i(t) devrede iken,



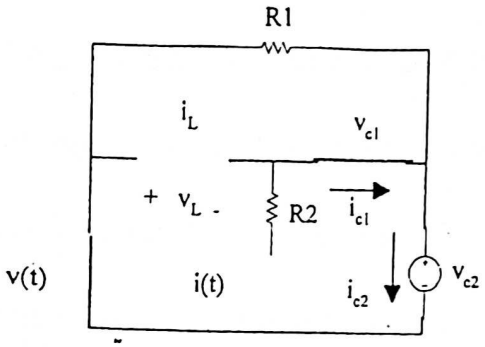
$$v_L = 0$$
$$i_{c1} = i(t)$$
$$i_{c2} = i(t)$$

c-) sadece v_{c1} gerilim kaynağı devrede iken,



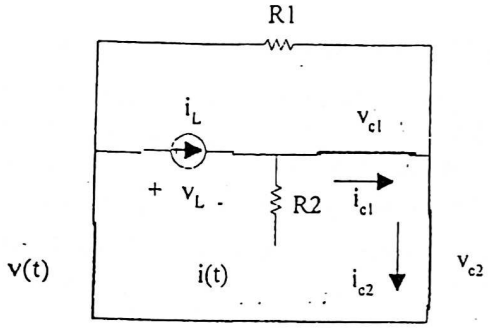
$$v_L = -v_{c1}$$
$$i_{c1} = 0$$
$$i_{c2} = 0$$

d-) sadece v_{c2} gerilim kaynağı devrede iken,



$$v_L = -v_{c2}$$
$$i_{c1} = 0$$
$$i_{c2} = -\frac{v_{c2}}{R1}$$

e-) sadece i_L akım kaynağı devrede iken,



$$v_L = 0$$
$$i_{c1} = i_L$$
$$i_{c2} = i_L$$

Yukarıda bulunan vL, ic1 ve ic2 değerlerinin toplamından toplam vL, ic1 ve ic2 bulunacak ve devrenin durum denklemi,

$$\frac{d}{dt} v_{c1}(t) = \frac{1}{C_1}[i_L(t) + i(t)]$$
$$\frac{d}{dt} v_{c2}(t) = \frac{1}{C_2}[-\frac{v_{c2}(t)}{R1} + i_L(t) + i(t) + \frac{v(t)}{R1}]$$
$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{1}{L}[-v_{c1}(t) - v_{c2}(t) + v(t)]$$

Matris düzeninde,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C1} \\ 0 & -\frac{1}{R1C2} & \frac{1}{C2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C1} \\ \frac{1}{R1C2} & \frac{1}{C2} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

Karmaşık devrelerde, devre graf teorisinden yararlanarak sistematik biçimde durum denklemlerini çıkarmak daha uygundur. Verilen devrenin grafı, uygun bir ağaç yapısı oluşturacak şekilde dal ve kirişler olarak çizilebilir. Uygun bir ağaç yapısı aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

1. Gerilim kaynakları dal olarak ağaç içine alınmalıdır. Gerilim kaynaklarının yönü, kaynak içinde (+) dan (-) ye doğrudur.
2. Akım kaynakları kiriş olarak ağaç içine alınmalıdır. Akım kaynaklarının yönü kaynağın yönündedir.
3. Uygun bir ağaçta oluşan dallar, bütün düğümlere bağlanmalı ancak, kapalı bir çevre oluşturmamalıdır.
4. Kondansatörler (3. koşulu sağlıyorsa hepsi) dal olarak alınmalıdır. Kondansatörlerin hepsi dal olarak alınamıyorsa kiriş olarak alınmak durumunda olan kondansatörün değişkeni artık durum değişkeni olarak alınmamalıdır.
5. Bobinler (3. koşulu sağlıyorsa hepsi) kiriş olarak alınmalıdır. Bobinlerin hepsi kiriş olarak alınamıyorsa dal olarak alınmak durumunda olan bobinin değişkeni artık durum değişkeni olarak alınmamalıdır.
6. Dirençler, ağacı tamamlamak üzere dal yada kiriş olarak alınmalıdır.

Oluşturulan ağaçta, dal olan kondansatör gerilimleri (yada yükleri) ile kiriş olan endüktör akımları (yada akıları) bağımsız durum değişkenleridir. Durum değişkenlerinin sayısı da devrenin mertebesini gösterir. Uygun ağaç oluşturulduktan sonra elemanların uç denklemleri ve temel çevre ve kesit denklemlerinden (kirchoff kanunlarından) faydalanarak durum denklemleri elde edilir.

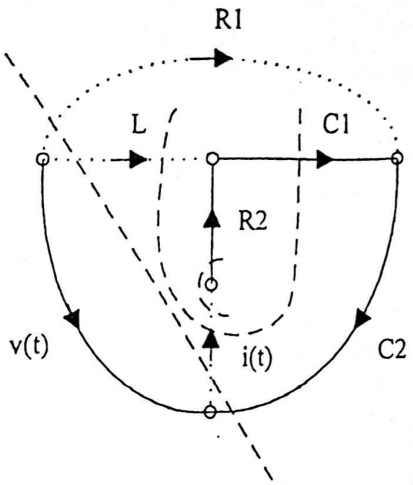
Temel çevre denklemleri (kirchoff' un gerilimler kanunu) yazılırken, seçilen çevrede bir kiriş olmalı ve o kirişin gerilimi dal gerilimleri cinsinden yazılmalıdır. Temel kesit denklemleri (kirchoff'un akımlar kanunu) yazılırken sadece bir dalı görecek şekilde kirişler üzerinden kesitler alınmalı ve kesitin gördüğü dal akımı kiriş akımları cinsinden yazılmalıdır. Aşağıdaki birkaç örnekle elektrik devrelerinin durum denklemlerinin çıkarılışı verilmiştir. Daha fazla örnek, Bölüm 2 de verilmiştir.

Örnek A.14

Örnek A.13 de verilen elektrik devresinin durum denklemlerini çıkarınız.

Çözüm

Örnek A.13 de verilen devrenin ağaç yapısı aşağıdaki gibi çizilebilir. Devre grafı üzerinde temel kesitler gösterilmiştir. Temel çevrelerin ise; L-C1-C2-v(t) çevresi ile R1-C2-v(t) çevresi olduğu görülebilir.



Bu durumda devrenin temel çevre denklemleri;

$$v_L(t) = v(t) - v_{c1}(t) - v_{c2}(t)$$
$$v_{R1}(t) = v(t) - v_{c2}(t)$$

Temel kesit denklemleri ise,

$$i_{R1}(t) = i(t)$$
$$i_{c1}(t) = i(t) + i_L(t)$$
$$i_{c2}(t) = i(t) + i_L(t) + i_{R1}(t)$$

olarak yazılır. Durum değişkenleri ise $v_{c1}(t)$, $v_{c2}(t)$ ve $i_L(t)$ dir. Yukarıda yazılan temel çevre ve kesit denklemlerinden yararlanarak $i_{c1}(t)$, $i_{c2}(t)$ ve $v_L(t)$ eşitlikleri bulunursa,

$$v_L(t) = v(t) - v_{c1}(t) - v_{c2}(t)$$

olduğu ve buna göre bobinle ilgili durum denklemi,

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{1}{L}[v(t) - v_{c1}(t) - v_{c2}(t)]$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde,

$$i_{c1}(t) = i(t) + i_L(t)$$

olduğu ve C1 kondansatörü ile ilgili durum denklemi;

$$\frac{d}{dt} v_{c1}(t) = \frac{1}{C1}[i(t) + i_L(t)]$$

olarak ve,

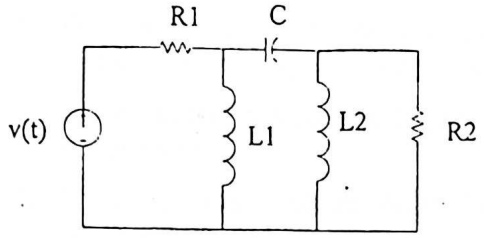
$$i_{c2}(t) = i(t) + i_L(t) + i_{R1}(t) = i(t) + i_L(t) + \frac{v(t) - v_{c2}(t)}{R1}$$

olduğundan C2 kondansatörü ile ilgili durum denklemi ise,

$$\frac{d}{dt} v_{c2}(t) = \frac{1}{C2}[i(t) + i_L(t) + \frac{v(t) - v_{c2}(t)}{R1}]$$

Örnek A.15

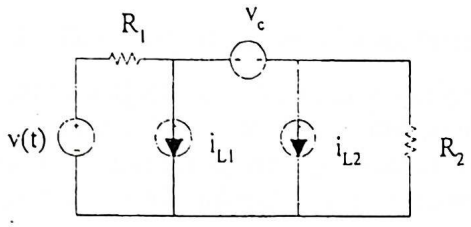
Şekilde verilen elektrik devresinin durum denklemlerini çıkarınız.



Çözüm

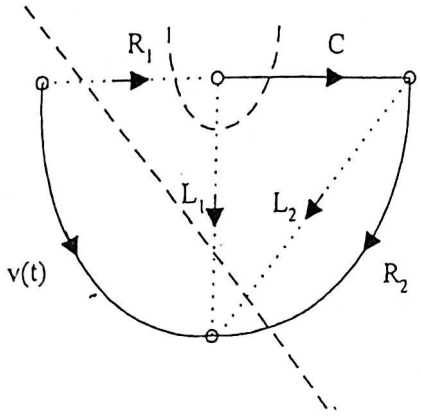
Bu devreyi, hem temel devre yasalarından yararlanarak hem de graf teorisinden yararlanarak çözelim.

a-) Kondansatörler yerine gerilim kaynakları, bobinler yerine de akım kaynakları bağlanırsa,



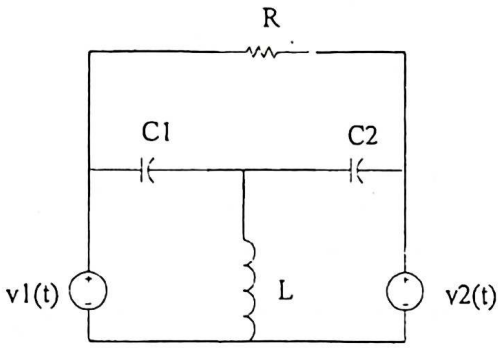
Bu devrede düğüm denklemlerinden yararlanarak $i_c(t)$, $v_{L1}(t)$ ve $v_{L2}(t)$ bulunarak dinamik elemanların uç denklemlerinde yerine yazılıp durum denklemleri çıkarılabilir.

b-) Verilen devrenin ağaç yapısı ve ağaç üzerinde alınabilecek temel kesitler aşağıdaki şekilde verilmiştir.



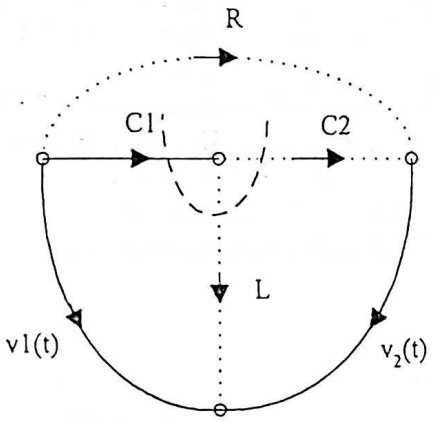
Örnek A.16

Şekilde verilen elektrik devresinin durum denklemlerini çıkarınız.



Çözüm

Verilen devrenin ağaç yapısı aşağıda çizilmiş ve üzerinde alınabilecek bağımsız kesitler gösterilmiştir. Uygun ağaç oluşmadığından kondansatörlerden bir tanesi (C2) kiriş olarak alınmak durumunda kalınmıştır. Buna göre durum değişkenleri; $v_{c1}(t)$ ve $i_L(t)$ olacaktır.



Temel kesit denklemleri;

$$i_{c1}(t) = -i_L(t) - i_{c2}(t)$$

Temel çevre denklemleri;

$$v_L(t) = v_1(t) - v_{c1}(t)$$
$$v_R(t) = v_1(t) - v_2(t)$$
$$v_{c2}(t) = v_1(t) - v_2(t) - v_{c1}(t)$$

Durum denkleri ise;

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{1}{L}[v_1(t) - v_{c1}(t)]$$

$$\frac{d}{dt} v_{c1}(t) = \frac{1}{C1}[-i_L(t) - i_{c2}(t)] = \frac{1}{C1}[-i_L(t) - C2\frac{d}{dt} v_{c2}(t)] = \frac{1}{C1}[-i_L(t) - C2\{\frac{d}{dt}(v1(t) - v2(t) - v_{c1}(t))]$$

Buradan $\frac{d}{dt} v_{c1}(t)]$ çekilerek denklemler düzenlenir ve matris düzeninde yazılırsa, aşağıdaki durum denklemi elde edilecektir.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C1-C2} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{C2}{C1-C2} & \frac{C2}{C1-C2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Kontrol Sistemleri Ders Notları II

18 EKİM 2001

ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) ... Hazar V.D. 263 014 8817

Bölüm 2

DİNAMİK SİSTEMLERİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Giriş

Bir denetim sistemini meydana getiren birimler elektrik, elektronik , mekanik, hidrolik...vs. gibi çok çeşitli fiziksel yapıdaki elemanlardan oluşabilir. Bu nedenle, denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında elemanların fiziksel yapıları yerine matematiksel modelleri önem kazanır. Bir dinamik sistemin matematiksel modeli, sistemin dinamiklerini doğru olarak tanımlayan denklemler seti olarak tanımlanır. Matematiksel modeller ne çok karmaşık ne de basit olmalıdır ve yeterince doğru bir model elde etmek, denetim alanındaki en önemli problemlerden bir tanesidir . Bir sistemin matematiksel modeli çeşitli şekillerde çıkarılabilir. Doğrusal zamanla değişmeyen sürekli zaman sistemleri için en çok kullanılan matematiksel modeller;

1-) Diferansiyel denklemler,
2-) Transfer fonksiyonları,
3-) Durum denklemleridir.

Sistemin özelliğine göre bu modellerden biri seçilebilir ancak denetim sistemlerinin analiz ve tasarımında transfer fonksiyonları ve durum denklemleri daha uygundur. Örneğin bir girişli bir çıkışlı sistemlerin geçici rejim yada frekans cevabı analizinde transfer fonksiyonları ile modelleme uygun iken çok girişli çok çıkışlı sistemlerin durum denklemleri ile modellenmesi daha uygundur. Ayrıca durum denklemleri ile modelleme, bilgisayar destekli tasarım algoritmaları için de uygundur. (EK-A ya bakınız)

2.1 Sistem Modellerinin Dönüşümü

Zamanla değişmeyen doğrusal sistemler, yukarıda belirtildiği gibi diferansiyel denklemler, transfer fonksiyonları yada durum denklemleri ile modellenebilirler. Denetim sistemlerinin analiz ve tasarımı açısından sistemin özelliğine göre bunlardan bazıları tercih edilmekle yada gerekli olmakla birlikte ihtiyaç duyulduğunda bu modeller, birbirlerine de dönüştürülebilir. Sistemlerin matematiksel modellenmesinden önce modellerin birbirine dönüşümlerinin verilmesi yararlı olacaktır. Transfer fonksiyonu ile diferansiyel denklem arasındaki dönüşüm bölüm 1 de verildiğinden bu kısımda, diğer modellerin birbirine dönüşümü ele alınacaktır.

2.2.1 Durum Denkleminden Transfer Fonksiyonunu Elde Etme

Durum denklemleri genelde çok girişli çok çıkışlı sistemlerin analiz ve tasarımına yöneliktir ancak bir girişli bir çıkışlı sistemlere de uygulanabilir. Bir girişli bir çıkışlı bir sistemin durum denkleminden sistemin transfer fonksiyonu elde edilebilir. Bir sistemin durum ve çıkış denklemleri;

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) &= C.x(t) + D.u(t) \end{aligned} \qquad 2.1$$

olduğuna göre bu sistemin transfer fonksiyonu G(s) = Y(s) / U(s) oranını bulabilmek için başlangıç koşulları sıfır alınarak yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümünden yararlanılmalıdır.

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \qquad 2.2$$

Bu denklemlerden durum değişkenleri yok edilirse sistemin transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D \qquad 2.3$$

olara elde edilir. Eğer durum denkleminin temsil ettiği sistem çok girişli ve/veya çok çıkışlı ise Denklem 2.3 artık bir tek transfer fonksiyonu değil, her bir elemanı birer transfer fonksiyonu olan bir matristir ve bu matris *transfer matrisi (TM)* adını alır. Bu durumda, sistemin çıkış/giriş oranı yerine sistemin çıkışı,

$$Y(s) = TM(s) = \left[C(SI - A)^{-1}B + D\right]U(s) \qquad 2.4$$

olarak ifade edilir.

Örnek 2.1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$[y(t)] = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [1 \quad 2]\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Verilen durum denkleminden sistemin transfer matrisini bulunuz.

Çözüm:

$TM(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$ olduğuna göre matris işlemleri gerçekleştirilirse,

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s-3)}$$

$$TM(s) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{(s+1)(s-3)} & 0 \\ \dfrac{2}{(s+1)(s-3)} & \dfrac{s+1}{(s+1)(s-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + [1 \quad 2]$$

$$TM(s) = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{2}{(s+1)(s-3)} & 2 + \dfrac{(s+1)}{(s+1)(s-3)} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2.2.2 Diferansiyel Denklemden Durum Denklemini Elde Etme

Diferansiyel denklemi bilinen bir sistemin durum denklemi de yazılabilir. Ancak, bu durumda diferansiyel denklemde, girişin türevlerinin bulunup bulunmamasına göre durum değişkenlerinin atanmasında farklı yollar izlenmelidir.

Örnek 2.2:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 5u(t)$$

denklemi ile tanımlanan sistemin durum denklemini çıkarınız.

Çözüm

Sistem 3.dereceden olduğundan durum değişkeni sayısı da 3 olacaktır. Girişin türevleri bulunmadığından durum değişkenlerini aşağıdaki düzende atamak uygun olacaktır.

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$
$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$$

Son eşitliğin türevi alındığında $\dot{x}_3 = \dddot{y}$ olduğu görülmektedir. Sistemin verilen diferansiyel denkleminde atanan durum değişkenleri yerine yazılırsa,

$$\dot{x}_3(t) + 2x_3(t) + 3x_2(t) + 4x_1(t) = 5u(t)$$

olacaktır. Bulunan durum değişkenleri, durum denklemi düzeninde yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$[y_1(t)] = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

olur.

Diferansiyel denklemde, girişin türevlerinin de bulunması durumunda, durum değişkenleri yukarıdaki örnekte verildiği gibi atanamaz. Aksi halde elde edilen durum denkleminde girişin türevleri dè bulunacaktır. Dolayısıyla, girişin türevlerini yok edecek şekilde uygun katsayılara sahip ek terimlerin bulunması gerekecektir. Örnek olarak aşağıdaki gibi genel bir diferansiyel denklemi ele alalım.

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n y = b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b_n u \qquad 2.5$$

Bu sistemin durum denklemini bulabilmek için durum değişkenleri aşağıdaki düzende atanmalıdır.

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = y' - \beta_0 u' - \beta_1 u = x_1 + \beta_1 u \qquad 2.6$$

$$x_3 = y'' - \beta_0 u'' - \beta_1 u' - \beta_2 u = x_2 + \beta_2 u$$

Burada beta katsayıları, verilen diferansiyel denklemin katsayılarından da yararlanarak aşağıdaki gibi seçilmelidir.

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \end{aligned} \qquad 2.7$$

Örnek 2.3:

$$y^4(t) + 2y^3(t) + 3.y^2(t) + 4.y^1(t) + 5y(t) = u^2(t) + 2u^1(t) + 3u(t)$$

Verilen diferansiyel denklem ile tanımlanan sistemin durum denklemini bulunuz.

Çözüm:

Sistemin derecesi n=4 olduğundan verilen diferansiyel denklemden,

$a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=5$ ve $b_0=0$, $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=2$, $b_4=3$

olduğu görülebilir. Buna göre β katsayıları Denklem 2.7 den,

$\beta_0=0,\ \beta_1=0,\ \beta_2=1,\ \beta_3=0,\ \beta_4=0$

olarak bulunur. Bulunan β katsayılarına göre Denklem 2.6 da verilen eşitlikler kullanılarak,

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y' = x_1$$

$$x_3 = y'' - u = x_2 - u$$

$$x_4 = y''' - u' = x_3 - u'$$

olarak belirlenir. Yukarıdaki eşitliklerden 3 adet durum değişkeni belirlenmiş olduğundan 4. durum değişkenini belirlemek için son eşitliğin türevi alınarak sistemin diferansiyel denkleminde belirlenen durum değişkenleri yerine yazılırsa,

$$x_4 = y'''' - u''$$

olduğundan,

$$\dot{x}_4 + u'' + 2(x_4 + u') + 3(x_3 + u) + 4x_2 + 5x_1 = u'' + 2u' + 3u$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse 4. durum değişkeninin denklemi,

$$\dot{x}_4 = -2x_4 - 3x_3 - 4\dot{x}_2 - 5x_1 = 0$$

bulunur. Matris düzeninde toplu olarak durum denklemi,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

2.2.3 Transfer Fonksiyonundan Durum Denklemi Elde Etme

Transfer fonksiyonu bilinen sistemlerin diferansiyel denklemleri, s laplace değişkeni yerine D türev operatörü yazıldığında doğrudan elde edilebileceği gibi durum denklemleri de çıkarılabilir. Transfer fonksiyonundan durum denklemlerine dönüşüm genel olarak 3 yol izlenerek yapılabilir ve bu yöntemler örneklerle verilecektir.

a) Kanonik Gerçekleme:

Kanonik gerçekleme ile verilen transfer fonksiyonundan elde edilen durum denklemi, kanonik düzende durum denklemi olarak söylenir.

Örnek 2.4

$$T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^3+2s^2+3s+1}$$

olarak verilen sistemin kanonik düzende durum denklemini çıkarınız.

Çözüm

Öncelikle verilen transfer fonksiyonu, s' in negatif kuvvetlerine dönüştürülür ve x gibi bir değişkenle de çarpılırsa,

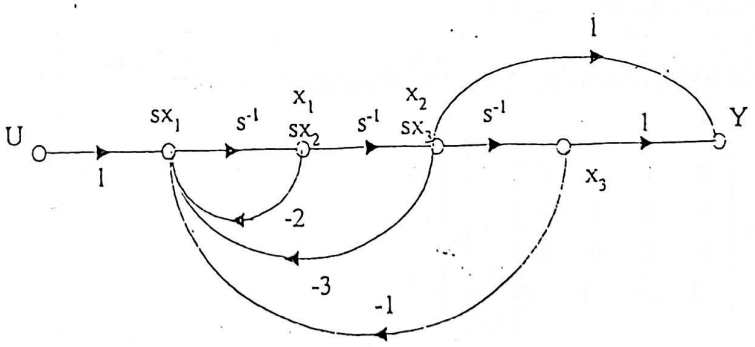
$$T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^3+2s^2+3s+1}\frac{xs^{-3}}{xs^{-3}}=\frac{xs^{-2}+xs^{-3}}{x+2xs^{-1}+3xs^{-2}+xs^{-3}}$$

elde edilir. Bulunan eşitlikte karşılıklı olarak pay ve paydalar özdeş yapılırsa,

$$U(s)=x+2xs^{-1}+3xs^{-2}+xs^{-3}$$

$$Y(s)=xs^{-2}+xs^{-3}$$

elde edilecektir. Bulunan son eşitliklere göre sistemin sinyal akış şeması aşağıdaki gibi çizilebilir.



Sinyal akış şemasındaki her bir integratör (s^{-1}) birer durum değişkenini ihtiva edeceğinden integratörlerin giriş ve çıkışlarına durum değişkenleri atanabilir. Buna göre,

$$x'_1=u(t)-2x_1-3x_2-x_3$$
$$x'_2=x_1$$
$$x'_3=x_2$$

Atanan durum değişkenlerine göre çıkış denklemi ise,

$$y = x_2 + x_3$$

olacaktır. Sonuç olarak matrissel düzende durum denklemi aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$[y_1] = [0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

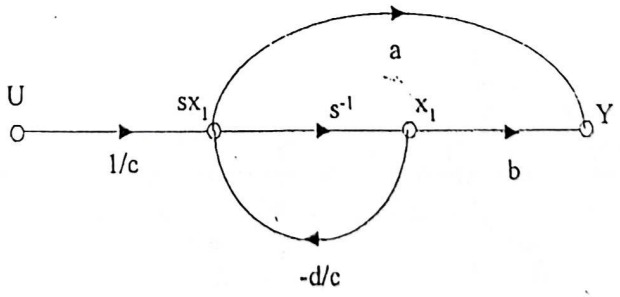
Örnek 2.5

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{as+b}{cs+d}.$$

olarak verilen basit bir transfer fonksiyonun kanonik düzende sinyal akış şemasını çizerek durum denklemini yazınız.

Çözüm

Örnek 2.4 de yapıldığı gibi burada verilen basit bir sistemin sinyal akış şeması aşağıdaki gibi çizilebilir.



Birinci dereceden bir sistem olduğuna göre atanan x1 durum değişkeni için sinyal akış şemasından durum değişkeni denklemi ve çıkış denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{c}u - \frac{d}{c}x_1$$

$$y = \frac{bc-ad}{c}x_1 + \frac{a}{c}u$$

Burada verilen basit bir kesrin sinyal akış şemasından yararlanarak basit kesirlerine ayrılmış halde verilen transfer fonksiyonlarının durum denklemleri de kolayca çıkarılabilir.

b) Seri Gerçekleme:

Bir transfer fonksiyonu, basit kesirlerin çarpımından oluşan bir fonksiyon olduğuna göre seri gerçeklemede, verilen transfer fonksiyonu çarpanlarına ayrılarak yazılabilir ve her bir basit çarpanın sinyal akış şeması çizilerek seri bağlanabilir.

Örnek 2.6

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

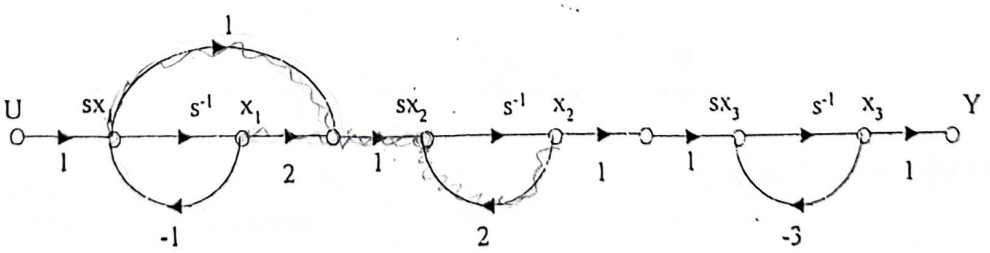
olarak çarpanlarına ayrılmış halde verilen transfer fonksiyonundan sistemin durum denklemini seri gerçekleme ile bulunuz.

Çözüm:

Verilen transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi basit çarpanlardan oluşacaktır.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s-2)} \cdot \frac{1}{(s+3)}$$

Her bir basit çarpanın örnek 2.5 deki gibi sinyal akış şeması çizilerek seri bağlanırsa sistemin toplam sinyal akış şeması elde edilir.



Kanonik düzende olduğu gibi her bir integratör bir durum değişkenini temsil ettiğinden,

$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_1 + 2x_2$ $\quad \dot{x}_1 = U - x_1$

$\dot{x}_3 = x_2 - 3x_3$

$y = x_3$

$$x'_1 = u - x_1$$
$$x'_2 = u + x_1 + 2x_2$$
$$x'_3 = x_2 - 3x_3$$
$$y = x_3$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde durum denklemleri elde edilir.

c) Paralel gerçekleme:

Paralel gerçeklemede, verilen transfer fonksiyonu basit kesirlerine ayrılır. Basit kesirlerin toplamından oluşan bir transfer fonksiyonun toplam sinyal akış şeması ise basit kesirlerin sinyal akış şemalarının paralel bağlanmasından oluşacaktır.

Örnek 2.7

$$T(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

olarak verilen sistemin durum denklemini paralel gerçekleme ile elde ediniz.

Çözüm

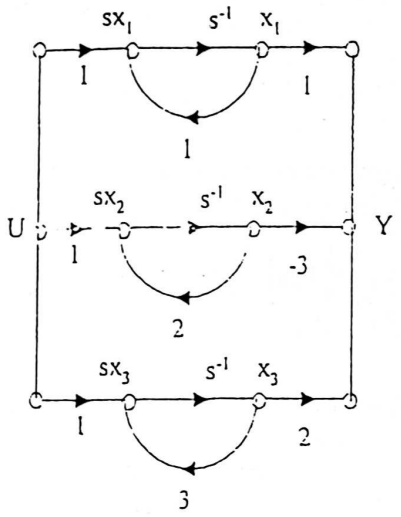
Verilen transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılacaktır.

$$T(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{(s-1)} - \frac{3}{(s-2)} + \frac{2}{(s-3)}$$

Her bir basit kesrin sinyal akış şeması çizilerek paralel bağlanırsa aşağıdaki sinyal akış şeması elde edilir.

Benzer şekilde integratörlerin giriş ve çıkışlarına durum değişkenleri atanırsa,

$$x'_1 = u + x_1$$
$$x'_2 = u + 2x_2$$
$$x'_3 = u + 3x_3$$
$$y = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$



Buradan durum denklemi matrissel düzende aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.3 Elektriksel Sistemlerin Modellenmesi

Bu bölümde direnç, kondansatör, bobin, işlemsel yükselteci ve elektronik elemanlar ihtiva eden elektrik ve elektronik devrelerin transfer fonksiyonu ve durum denklemi cinsinden matematiksel modellerinin çıkarılışı incelenecektir. Bu devrelerin modellerinin çıkarılışı ve analizi devre teorilerinde yeterince görüldüğünden ve EK-A da verildiğinden burada çeşitli örnekler verilecektir.

Örnek 2.8

Çözüm

Örnek 2.9

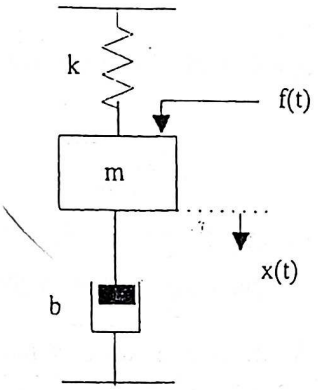
Çözüm

2.4 Mekanik Sistemlerin Modellenmesi

Mekanik sistemler kütle, yay ve sönümleme elemanlarının birbirleri ile çeşitli şekilde bağlanmasından oluşan doğrusal mekanik sistemler ve eylemsizlik momenti, bürulma yayı ve dönel sönümleme (sürtünme) elemanlarının birbirleri ile bağlanmasından meydana gelen dönel mekanik sistemler olarak iki grupta incelenir. Doğrusal mekanik sistemlerde bir kuvvetin etkisinde kalan kütle, yay ve sönümleme elemanlarının titreşim hareketlerinin incelenmesi dönel mekanik sistemlerde ise belirli bir döndürme torkunun etkisinde bulunan servomekanizmaların çıkış açısal konum veya açısal hız değişimlerinin incelenmesi esastır.

2.4.1 Doğrusal Mekanik Sistemler

Şekil 2.1 de kütle, yay ve sönümleme elemanından oluşan basit bir doğrusal mekanik sistem verilmiştir. Sönümleme elemanı, bir piston ve içi sıvı dolu bir silindirden ibaret olup pistonun hareket etmesi durumunda piston çubuğu ile silindir arasında akmaya zorlanan sıvının bir dirençle karşılaşması sonucu sürtünmeyi dolayısıyla sönümlemeyi sağlar.



Şekil 2.1 Doğrusal bir mekanik sistem

Sisteme, giriş olarak bir f(t) kuvveti uygulanırsa yayın ve sönümleme elemanının karşı koyma kuvvetlerine rağmen kütle yer değiştirecektir. Kütle doğrusal hareket ettiğinden kütlenin yer değiştirmesi, aldığı yola karşılık gelecek ve sistemin çıkış değişkenini x(t) temsil edecektir. Doğal olarak çıkış değişkeni, kütlenin hızı v(t) yada ivmesi a(t) de olabilir ve doğrusal hareketlerde bu değişkenlerin birimleri ve dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

Kütle, m – kg

Kuvvet, f(t)- N.

Kütlenin aldığı yol , x(t)- m

Kütlenin hızı, v(t)- m/sn

Kütlenin ivmesi, a(t)- m/sn^2

Bilindiği gibi bu değişkenler arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \qquad 2.8$$

Mekanik sistemlerin incelenmesinde temel yasa newton'un dinamik yasası (II. yasası) dır ve genel olarak doğrusal hareketler için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum F = m.a(t) \qquad 2.9$$

Burada, F- kütle üzerine etki eden toplam kuvvetleri (kg.) gösterir.

Kütle üzerine, dış giriş kuvveti f(t) den başka yayın ve sönümleme elemanlarının karşı koyma kuvvetleri etki etmektedir ve bu kuvvetler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$fk = k.x(t)$$
$$fb = b.\frac{d}{dt}x(t) = b.v(t) \qquad 2.10$$

Buna göre, çıkış değişkeni olarak kütlenin aldığı yol alınırsa Şekil 2.1 deki sistemin dinamik denklemi,

$$f(t) - b\frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \qquad 2.11$$

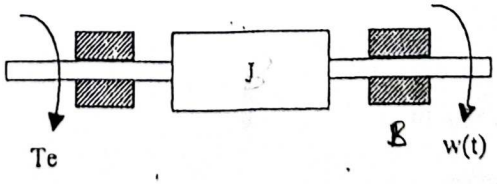
elde edilir. Sistemin girişi f(t) ve çıkışı x(t) olduğuna göre sistemin transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \qquad 2.12$$

bulunur.

2.4.2 Dönel mekanik sistemler

Şekil 2.2 de, eylemsizlik, yay ve sönümleme elemanlarından meydana gelen dönel bir mekanik sistem verilmiştir. Dönel sisteme uygulanan Te tork girişi, sürtünmenin ve burkulma yayının karşı torklarına rağmen sistemi w açısal hızı ile döndürmeye çalışacaktır. Dolayısıyla dönel sistemler için sistemin çıkış değişkeni, w açısal hızı, açısal yer değiştirme- konum- (θ) yada açısal ivme (α) olarak alınabilir.



Şekil 2.2. Dönel bir mekanik sistem

Dönel mekanik sistemlerin parametreleri ve değişkenleri arasındaki ilişkiler aşağıda tanımlanmıştır.

Eylemsizlik katsayısı, (J), - $kg.m^2$

Sürtünme katsayısı, (B), - Nm/rad./sn.

Tork, (Te), - Nm.

Konum, θ(t)- rad.

Açısal hız, ω(t), rad./sn.

Açısal ivme, α(t)- $rad./sn^2$

Dönel mekanik sistemler için Newton un dinamik yasası aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum T = J.\alpha(t) \qquad 2.13$$

Burada, T- dönel sisteme etki eden toplam torkları göstermektedir. Doğrusal mekanik sistemlere benzer şekilde dönel sistemlerde oluşan burkulma yayı ve sürtünme torkları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_B = B.w(t) = B\frac{d}{dt}\theta(t) \qquad 2.14$$

$$T_K = K\theta(t)$$

Buna göre Şekil 2.2 de verilen dönel sistem için dinamik denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Te - B\frac{d\theta(t)}{dt} - K\theta(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \qquad 2.15$$

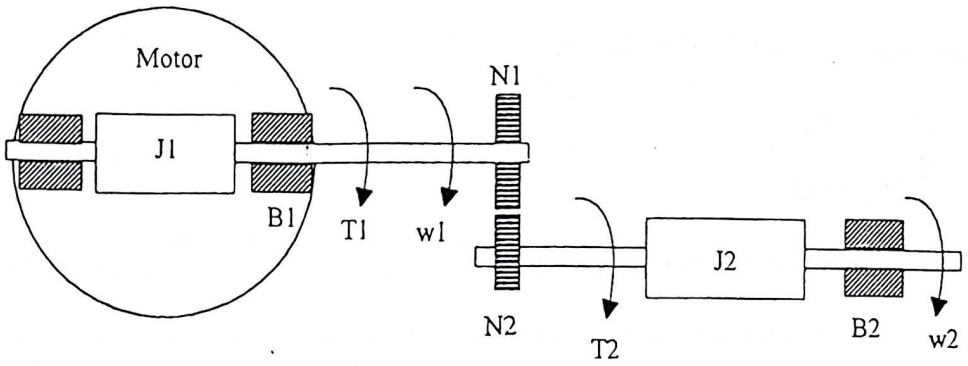
Dönel sistemin girişi Te ve çıkışı θ(t) olduğuna göre sistemin transfer fonksiyonunu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{Te(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} \qquad 2.16$$

Dişli Takımı İçeren Dönel Mekanik Sistemler

Dönel mekanik sistemlerde dişli takımları hız düşürmek/yükseltmek, torku artırmak/azaltmak yada tahrik elemanı ile verilen yükü eşlemek amacı ile yaygın olarak kullanılır. Şekil 2.3 de, mekanik bir yükün, dişli takımı üzerinden bir motor yardımı ile sürüldüğü dönel mekanik sistem verilmiştir. Burada dişli takımında millerin esnemez ve her

bir dişlinin diş sayısının dişli yarıçapı ile orantılı olduğu kabul edilmektedir. Bu durumda, motor mili ve yük mili tarafına dönüştürülmüş olan eşdeğer eylemsizlik momentinin ve eşdeğer sürtünme katsayısının bulunarak dönel mekanik sistemin dinamik denklemlerinin yazılması gerekir.



Şekil 2.3 Dişli takımı içeren dönel mekanik sistem

Dişli takımlarında parametrelerin ve değişkenlerin dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$n = \frac{N2}{N1}$ dişli dönüştürme oranı olmak üzere,

$$T_2 = n.T_1$$

$$\theta_2 = \frac{1}{n}.\theta_1$$

$$J_{21} = \frac{1}{n^2} J_2 \qquad 2.17$$

$$B_{21} = \frac{1}{n^2} B_2$$

Burada, X_{21} indisi, dişli takımının ikinci tarafındaki bir parametrenin birinci tarafına dönüştürülmüş değerini gösterir. Buna göre motor milinin gördüğü toplam eylemsizlik Je ve toplam sürtünme Be aşağıdaki gibi olacaktır.

$$J_e = (J_1 + \frac{J_2}{n^2})$$

$$B_e = (B_1 + \frac{B_2}{n^2})$$

Bu tanımlamalara göre, şekil 2.3 deki dönel mekanik sistemin denklemi,

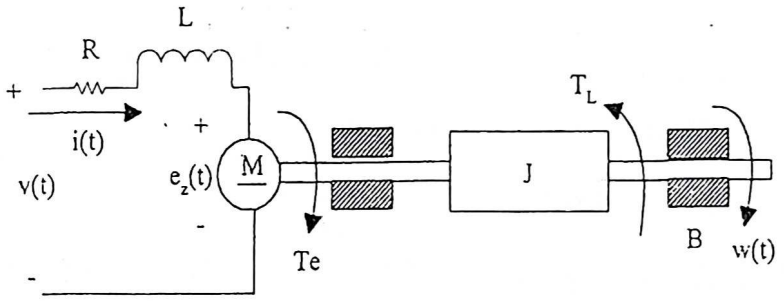
$$T_1 - Be\frac{d\theta 1(t)}{dt} = Je\frac{d^2\theta 1(t)}{dt^2} \qquad 2.18$$

ve sistemin transfer fonksiyonunu ise,

$$G(s) = \frac{\theta 1(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{s(Js+B)} \qquad 2.19$$

2.4.3 Elektro-mekanik Sistemler

Elektromekanik sistemler, elektrikli bir sistemle (genellikle bir elektrik motoru) mekanik bir sistemin birleşiminden oluşan sistemlerdir. Şekil 2.4 de sabit mıknatıslı bir doğru akım motorunun elektriksel ve mekaniksel devrelerinin modelleri verilmiştir.



Şekil 2.4 Doğru akım motorunun modeli

Motorun elektriksel devresi için işaretlenen sinyallere göre aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$v(t) - ez(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) \qquad 2.20$$

Diğer taraftan, motorda indüklenen zıt emk ve motorun ürettiği elektromanyetik tork,

$$ez(t) = Kew(t)$$
$$Te(t) = Kt.i(t) \qquad 2.21$$

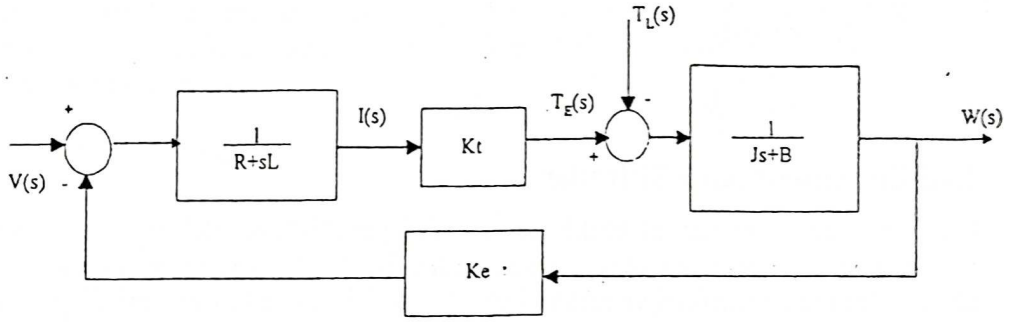
ve mekanik sistemin dinamik denklemi,

$$T_e(t) - T_L(t) = J\frac{d}{dt}w(t) + Bw(t) \qquad 2.22$$

olarak bilinmektedir. Yukarıdaki denklemlerin laplace dönüşümleri alınırsa,

$$V(s) - Ez(s) = (R+sL)I(s)$$
$$Ez(s) = KeW(s)$$
$$Te(s) = KtI(s) \qquad 2.23$$
$$Te(s) - T_L(s) = (Js+B)W(s)$$

ve bu denklemler blok şemaya taşınırsa DA motorun blok şeması aşağıdaki gibi elde edilecektir.



Şekil 2.5 DA motorun blok şeması

Şekil 2.5 deki blok şemadan motor hızının,

$$W(s) = G1(s).V(s) + G2(s).T_L(s) \qquad 2.24$$

olduğu görülmektedir. Burada,

$$G1(s) = \frac{\frac{1}{R+sL}.Kt.\frac{1}{Js+B}}{1+\frac{1}{R+sL}.Kt.\frac{1}{Js+B}.Ke} \qquad 2.25$$

$$G2(s) = -\frac{\frac{1}{Js+B}}{1+\frac{1}{R+sL}.Kt.\frac{1}{Js+B}.Ke} \qquad 2.26$$

Yukarıda, DA motorun transfer fonksiyonu olarak modeli çıkarılmıştır. Denklem 2.20-2.22 den, motorun durum denklemleri de yazılabilir. Motorun akımı ve hızı, dinamik değişkenler olduğuna göre, denklem 2.21 den ez(t) değeri 2.20 de ve yine denklem 2.21 den Te(t) değeri de 2.22 de yerine yazılarak elde edilen denklemler durum denklemi düzeninde yazılırsa aşağıdaki durum denklemi elde edilecektir.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{Ke}{L} \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(t) \\ T_L(t) \end{bmatrix} \qquad 2.27$$

ONTROL SİSTEMLERİ 3. NOT

01 KASIM 2001

ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) 2[illegible] 5[illegible] Hazar V.D. 253 014 9817

Bölüm 3

DENETİM SİSTEMLERİNİN ZAMAN BÖLGESİ KARAKTERİSTİKLERİ

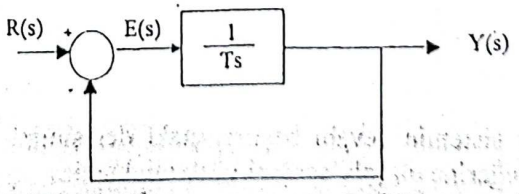
Giriş

Dinamik sistemlerin, her hangi bir giriş sinyaline karşı zaman bölgesindeki davranışları, denetim sistemlerinin analiz ve tasarımı açısından en önemli kriterlerdir. Dinamik bir sistem olan denetim sistemleri, zaman bölgesinde geçici durum ve kalıcı durum olmak üzere iki tür davranış gösterir. Geçici durum davranışı, sistemin belli bir dış giriş karşısında belli bir başlangıç değerinden belirli bir değere kadar zamana bağlı olarak gösterdiği davranıştır. Kalıcı durum davranışı ise sistemin geçici durum davranışı tamamlandıktan sonra başlayan ve artık değişmeyen davranıştır. Denetim sistemlerinin tasarımında, sistemin geçici ve sürekli durum davranışları en önemli tasarım kriterleri olarak ele alınmak durumundadır. Sistemin geçici durum cevabı, zaman sabiti veya doğal frekans ve sistemin sönüm oranına bağlıdır. Bunlar ise sistemlerin dinamik davranışı ile ilgili temel parametrelerdir.

Bu bölümde, transfer fonksiyonu ile modellenen çeşitli dereceden dinamik sistemlerin zaman bölgesindeki geçici ve sürekli durum cevapları incelenecektir. Bu incelemelerden cevap hızının, doğal frekansın ve sönüm oranının sistemin hangi temel parametrelerine bağlı oldukları da belirlenmiş ve arzu edilen bir davranışa sahip olmayan denetim sisteminden daha iyi bir davranış elde edebilmek için neler yapılabileceği ortaya çıkarılmış olur.

3.1 Birinci Dereceden Sistemlerin Zaman Bölgesi Karakteristikleri

Birinci dereceden bir sistem, fiziksel olarak bir elektriksel direnç-kondansatör (R-C), direnç-bobin (R-L) devresini yada bir direnç-kapasite elemanı ile modellenebilen akışkan, ısıl yada mekanik sistemi temsil ediyor olabilir. Birinci dereceden standart bir sistem aşağıdaki blok şema ile gösterilir.



Şekil 3.1 Birinci dereceden sistemin blok şeması

Şekil 3.1 deki blok şemadan, birinci dereceden standart bir sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \qquad 3.1$$

Burada T- sistemin zaman sabiti olup birinci dereceden sistemlerin dinamik davranışlarını tanımlayan en önemli kriterdir. Fiziksel yapısı ne olursa olsun, denklem 3.1 deki gibi birinci dereceden bir transfer fonksiyonuna sahip olan sistemler aynı giriş sinyaline karşı aynı cevabı verirler. Ancak, elde edilen cevap ilgilenilen fiziksel sisteme göre yorumlanabilir. Bu bölümde, birinci dereceden sistemlerin birim-basamak, birim-rampa ve birim ani darbe girişlerine karşı cevapları incelenecek ve cevap eğrisi üzerinde önemli noktalar belirlenecektir.

3.1.1 Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Basamak Cevabı

Sistemin giriş sinyali birim basamak fonksiyonun olduğuna göre R(s) = 1/s olarak denklem 3.1.de yerine yazılırsa sistemin cevabı laplace bölgesinde;

$$Y(s) = \frac{1}{(Ts+1)}\frac{1}{s} \qquad 3.2$$

olacaktır. Denklemin 3.2 nin ters laplace dönüşümü alınarak zaman bölgesinde birinci dereceden bir sistemin birim basamak cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

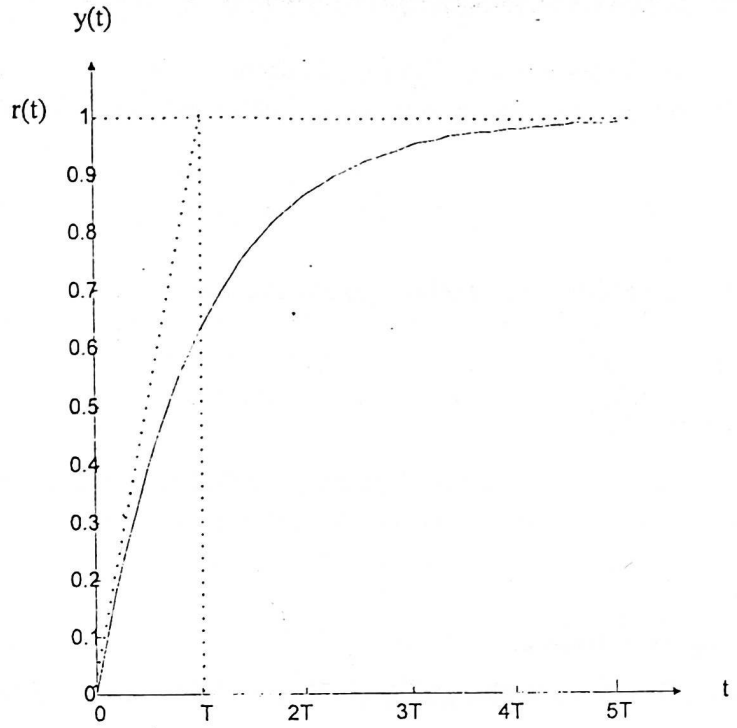
$$y(t) = u(t) - e^{-\frac{t}{T}} \qquad 3.3$$

Burada, u(t)- birim basamak fonksiyonunu göstermektedir. Denklem 3.3 ün zamana göre çizilen grafiği ve grafik üzerinde önemli noktalar Şekil 3.2 de görülmektedir.

Zaman sabiti (T), birinci dereceden sistemlerin dinamik davranışını karakterize eden önemli bir parametredir. Bir sistemin zaman sabiti ne kadar küçükse, cevabı o kadar hızlıdır. Üstel cevap eğrisinin diğer önemli bir özelliği ise t = 0'daki eğiminin 1/T 'ye eşit olmasıdır. Bu durum, grafikten görülebileceği gibi matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{1}{T} \qquad 3.4$$

Bu sonuç, eğer sistemin cevabı başlangıçtaki değişimini koruyabilseydi t = T anında sürekli durum değerine ulaşabileceğini göstermektedir.



Şekil 3.2 Birinci dereceden sistemin birim basamak cevabı

Birinci dereceden sistemlerde belirlenmesi gereken diğer bir kriter kalıcı durum hatasının var olup olmadığıdır. Kalıcı durum hatası, sistemin hata fonksiyonu yazarak yukarıdaki eşitliklerden hem zaman bölgesinde hem de s bölgesinde belirlenebilir. Sitemin hata fonksiyonu zaman bölgesinde,

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

ve s-bölgesinde,

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

olduğuna göre kalıcı durum hatası zaman bölgesinde,

$$ess = \lim_{t\to\infty}[r(t) - y(t)] = \lim_{t\to\infty}[1 - (u(t) - e^{-\frac{t}{T}})] = 0 \qquad 3.5$$

ve s-bölgesinde son değer teoremi uygulanarak,

$$ess = \lim_{s\to 0} s.[R(s) - Y(s)] = \lim_{s\to 0}\ s.[\frac{1}{s} - \frac{1}{Ts+1}.\frac{1}{s})] = 0 \qquad 3.6$$

elde edilir.

3.1.2 Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Rampa Cevabı

Birim rampa fonksiyonunun laplace dönüşümü $R(s) = 1/s^2$ olduğuna göre birinci dereceden bir sistemin birim rampa cevabı s-bölgesinde aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} \qquad 3.7$$

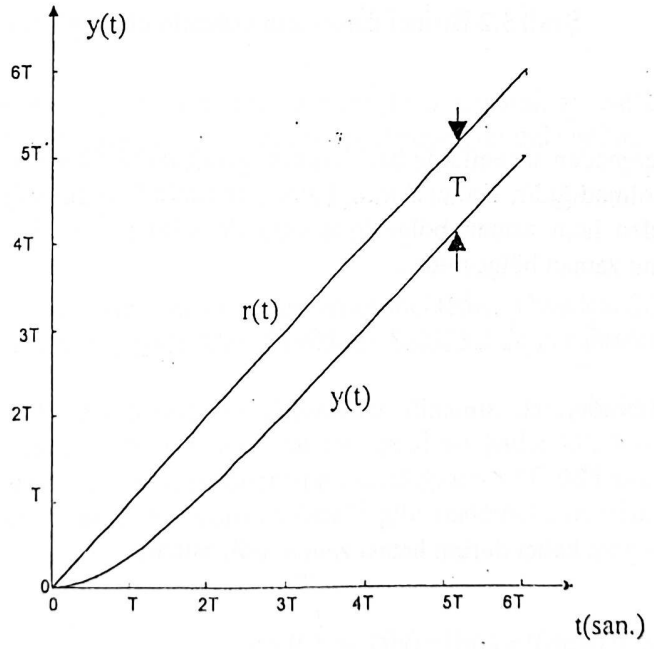
Laplace bölgesindeki cevap fonksiyonu basit kesirlerine ayrılırsa,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \qquad 3.8$$

elde edilir. Basit kesirlerin ters laplace dönüşümü alınarak zaman bölgesinde birinci dereceden sistemin birim rampa cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(t) = tu(t) - T.u(t) + Te^{-\frac{t}{T}} \qquad 3.9$$

Denklem 3.9 un zamana göre grafiği çizilirse aşağıdaki cevap eğrisi elde edilecektir.



Şekil 3.3 Birinci dereceden sistemlerin birim rampa cevabı

Birinci dereceden sistemlerin birim rampa giriş için kalıcı durum hatası, sistemin hata fonksiyonunun son değerinden belirlenebilir. Sistemin hata fonksiyonu zaman bölgesinde,

$$e(t) = r(t) - y(t) = t - (t - T + Te^{-t/T}) \Rightarrow e(t) = T(1 - e^{-t/T}) \qquad 3.10$$

olduğundan kalıcı durum hatası,

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = T \qquad 3.11$$

olarak T değerinde sabit bir kalıcı durum hatası meydana gelir. Buna göre sistemin zaman sabiti ne kadar küçük ise rampa girişlerde meydana gelebilecek kalıcı durum hatası da o oranda küçük olacaktır.

NOT: Rampa girişler için Laplace bölgesinde hata fonksiyonuna son değer teoremi uygulanarak kalıcı durum hatası bulunabilir mi? Niçin?

3.1.3 Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Ani Darbe Cevabı

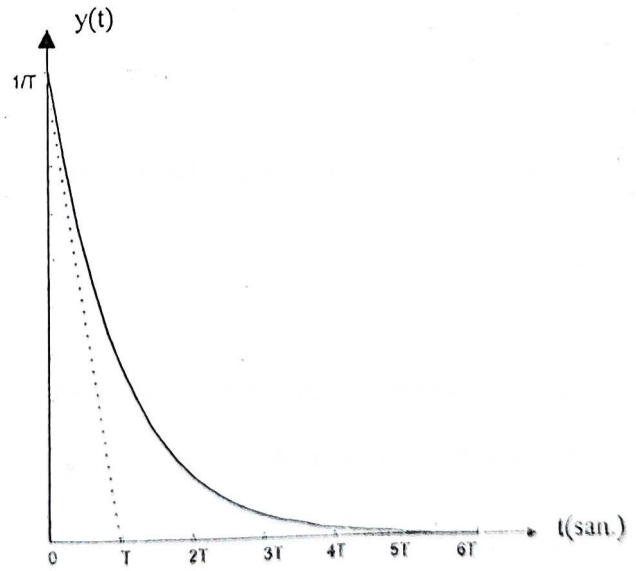
Birim ani darbe fonksiyonunun laplace dönüşümü R(s) = 1 olduğuna göre birinci dereceden sistemin birim ani darbe cevabı s- bölgesinde aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \qquad 3.12$$

Bu fonksiyonun ters laplace dönüşümü alınırsa;

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \qquad 3.13$$

elde edilir. Denklem 3.13 ün zamana göre çizilen grafiği Şekil 3.4 de verilmiştir.



Şekil 3.4 Birinci dereceden sistemlerin birim ani darbe cevabı

Birinci dereceden sistemlerin birim ani darbe giriş için kalıcı durum hatası zaman bölgesinde,

$$ess = \lim_{t\to\infty}[r(t) - y(t)] = \lim_{t\to\infty}[0 - \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}})] = 0 \qquad 3.14$$

Laplace bölgesinde son değer teoremi uygulanarak,

$$ess = \lim_{s\to 0} s.[R(s) - Y(s)] = \lim_{s\to 0} s.[1 - \frac{1}{Ts+1}.1)] = 0 \qquad 3.15$$

elde edilir.

Örnek 3.1:

Şekil 3.1 de verilen blok şemada ileri besleme transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{0.8}{s+0.2}$ olarak verilirse,

a-) Açık çevrim ve kapalı çevrim sistemin zaman sabitesini belirleyiniz.

b-) Birim basamak cevabını bularak grafiğini çiziniz.

c-) Birim basamak giriş için sürekli rejim hatası var mıdır? Belirleyiniz.

Çözüm

a-) Açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{1}{0.2}\frac{0.8}{5s+1}$$

olduğuna göre açık çevrim zaman sabitesi Ta=5 saniyedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.8}{s+1}$$

olduğuna göre kapalı çevrim zaman sabitesi Tk=1 saniyedir.

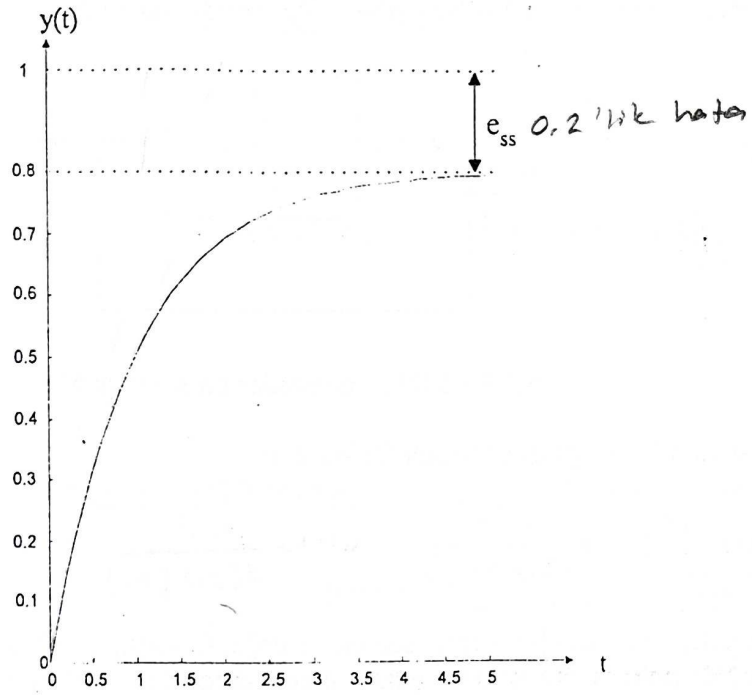
b-) Kapalı çevrim sistemin birim basamak cevabı,

$$Y(s) = T(s).R(s) = 0.8\frac{1}{s+1}.\frac{1}{s}$$

olduğundan ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesindeki cevabı,

$$y(t) = 0.8(1 - e^{-t})$$

olur. Buna göre sistemin birim basamak cevabı aşağıdaki gibi çizilir.



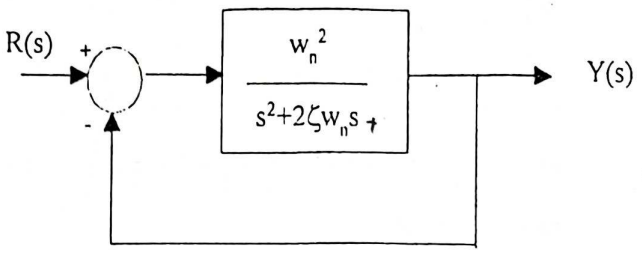
c-) Çizilen grafikten kalıcı durum hatasının ess=1-0.8=0.2 olduğu görülmektedir. Gerekirse s.bölgesinde son değer teorminden,

$$ess = \lim_{s\to 0} s.[R(s) - Y(s)] = \lim_{s\to 0} s.[\frac{1}{s} - \frac{0.8}{s+1}.\frac{1}{s})] = 0.2$$

olarak bulunur.

3.2 İkinci Dereceden Sistemlerin Zaman Bölgesi Karakteristikleri

İkinci dereceden standart bir sistemin blok şeması aşağıdaki blok şemada gösterilmiştir.



Şekil 3.5 İkinci dereceden bir sistemin blok şeması

Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2} \qquad 3.16$$

Burada; w_n [rad/s]- sistemin sönümsüz doğal frekansı, ζ - sönüm oranı olarak söylenir. Doğal frekans ile sönüm oranı, ikinci dereceden sistemlerin dinamik davranışını karakterize eden iki temel parametredir.

Denklem 3.16 dan, ikinci dereceden standart bir sistemin karakteristik denkleminin kökleri w_n ve ζ cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$s_{1,2}=-\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1} \qquad 3.17$$

Denklem 3.17 den sönüm oranı ζ' nin alacağı değere göre karakteristik denklemin köklerinin gerçek veya karmaşık olabileceği görülmektedir. Bu durumda, sönüm oranının değerine bağlı olarak köklerin durumu ve buna bağlı olarak sistemin göstereceği dinamik davranışı 3 grupta incelemek mümkündür.

a) $\zeta > 1$ ise; sistemin $s_{1,2}$ kökleri gerçek ama farklı olup değerleri denklem 3.17 den elde edilecektir. Bu tür sistemler aşırı sönümlü sistemler olarak söylenir.

b) $\zeta = 1$ ise; sistemin $s_{1,2}$ kökleri gerçek ve birbirine eşit olup $s_{1,2}=\pm w_n$ olacaktır. Bu tür sistemler kritik sönümlü sistemler olarak söylenir.

c) $\zeta < 1$ ise; sistemin $s_{1,2}$ kökleri karmaşık ve değerleri $s_{1,2}=-\alpha \pm jw_d$ olacaktır. Bu tür sistemler düşük sönümlü sistemler olarak söylenir. Burada;

$\alpha=\zeta w_n$ - sönüm faktörü,

$w_d=w_n\sqrt{1-\zeta^2}$ - sönümlü doğal frekans

olarak söylenir.

Örnek 3.2:

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu $T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2}{s^2+2s+4}$ olarak verilen ikinci dereceden bir sistemin sönüm oranını, doğal frekansını ve köklerini belirleyiniz.

Çözüm

Standart ikinci dereceden sistemin değişkenlerine göre verilen sistem değerlendirilirse,

$$w_n^2 = 4 \Rightarrow w_n = 2$$

$$2\zeta w_n = 2 \Rightarrow \zeta = 0.5$$

olarak bulunur. Sönüm oranı birden küçük olduğuna göre sistemin kökleri karmaşıktır ve,

$$\alpha = \zeta w_n = 1$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.732$$

Dolayısıyla sistemin kökleri,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm jw_d = -1 \pm j1.732$$

olarak belirlenir.

3.2.1 İkinci Dereceden Sistemlerin Birim Basamak Cevabı

Birim basamak fonksiyonu R(s) = 1/s olarak tanımlandığına göre ikinci dereceden sistemin birim basamak cevabı s-bölgesinde denklem 3.16 den aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$Y(s)=\frac{{w_n}^2}{(s^2+2\zeta w_n s+{w_n}^2)}\frac{1}{s} \qquad 3.18$$

Denklem 3.18 in ζ ve w_n e göre ters laplace dönüşümün alınarak zaman bölgesinde cevabının bulunabilmesi için yukarıda açıklandığı gibi ζ nin 3 farklı durumuna göre sistemin ayrı ayrı incelenmesi gerekir. Buna göre,

a-) ζ >1 olan aşırı sönümlü sistemler

Bu durumda sistemin kökleri gerçek ve ayrık olacaktır.

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad 3.19$$

Bu gerçek ve ayrık köklere göre denklem 3.18 basit kesirlerine ayrılır,

$$Y(s)=\frac{K1}{s}+\frac{K2}{s+s_1}+\frac{K3}{s+s_2} \qquad 3.20$$

ve ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde ikinci dereceden sistemlerin birim basamak cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t)=K_1+K_2.e^{s_1t}+K_3e^{s_2t} \qquad 3.21$$

Burada;

$$K1=1 \qquad 3.22.a$$

$$K2=\frac{1}{-2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}+2(\zeta^2-1)} \qquad 3.22.b$$

$$K3=\frac{1}{2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}+2(\zeta^2-1)} \qquad 3.22.c$$

olarak basit kesirlere ayrıştırma sonucunda bulunan sabit katsayılardır.

b-) ζ=1 olan kritik sönümlü sistemler

Bu durumda sistemin kökleri gerçek ama katlı olacaktır.

$$s_{1,2}=-w_n \qquad 3.23$$

Bu gerçek ve katlı köklere göre denklem 3.18 basit kesirlerine ayrılır,

$$Y(s)=\frac{K1}{s}+\frac{K2}{s+s1}+\frac{K3}{(s+s1)^2} \qquad 3.24$$

ve ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde ikinci dereceden sistemlerin birim basamak cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t)=K_1+K_2e^{-w_nt}+K_3te^{-w_nt}=1-e^{-w_nt}-w_nte^{-w_nt} \qquad 3.25$$

Burada,

$$K1=1 \qquad 3.26.a$$

$$K2=-1 \qquad 3.26.b$$

$$K3=-wn \qquad 3.26.c$$

olarak basit kesirlere ayrıştırma sonucunda bulunan sabit katsayılardır.

c-) ζ<1 olan düşük sönümlü sistemler

Bu durumda sistemin kökleri karmaşıktır. Karmaşık kökler eşlenik durumda olacağından sistemin kökleri aşağıdaki gibi belirlenecektir.

$$s_{1,2} = -\xi w_n + j w_n \sqrt{1-\xi^2} \quad \text{veya} \quad s_{1,2} = -\alpha \pm j w_d \qquad 3.27$$

Bu karmaşık köklere göre denklem 3.18 basit kesirlerine ayrılır,

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s+s1)(s+s2)s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+s1)} + \frac{K_3}{(s+s2)} \qquad 3.28$$

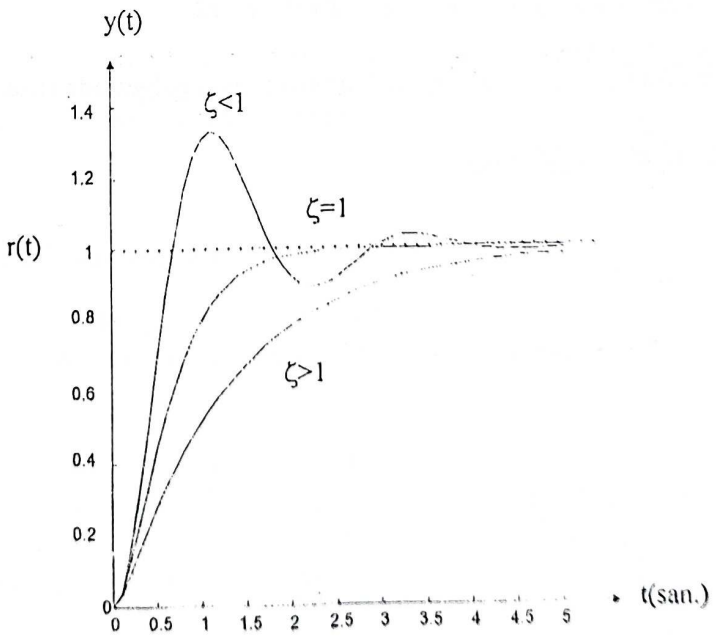
ve ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde ikinci dereceden sistemlerin birim basamak cevabı aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$y(t) = 1 - e^{-\alpha t}\{\cos(w_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(w_d t)\} \qquad 3.29$$

yada, trigonometrik eşitliklerden yararlanarak sistemin çıkışı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} . e^{-\alpha t} . \sin(w_d t + \theta) \qquad 3.30$$

Yukarıda elde edilen cevap eğrilerinin, wn=3 olan ve farklı sönüm oranlarındaki sistemler için, zamana göre değişimleri toplu olarak Şekil 3.6 da verilmiştir.



Şekil 3.6 İkinci dereceden sistemlerin birim basamak cevabı

İkinci dereceden standart sistemlerin birim basamak giriş için kalıcı durum hatası, hata fonksiyonunun son değerlerinden belirlenebilir. Laplace bölgesinde,

$$ess = \lim_{s\to 0} s.\{R(s)-Y(s)\} = \lim_{s\to 0} s.\{\frac{1}{s} - \frac{w_n^{\,2}}{(s^2+2\xi w_n s+w_n^{\,2})}\frac{1}{s}\} = 0 \qquad 3.31$$

olduğundan sönüm oranı ve doğal frekanstan bağımsız olarak kalıcı durum hatası oluşmayacaktır. Bu durum, Şekil 3.6 daki cevap eğrilerinden de görülmektedir.

3.2.2 İkinci Dereceden Sistemlerin Birim Rampa Cevabı

Birim rampa fonksiyonu R(s) = $1/s^2$ olarak tanımlandığına göre ikinci dereceden sistemin birim basamak cevabı s-bölgesinde denklem 3.16 dan aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s^2+2\xi w_n s+w_n^{\,2})}\cdot\frac{1}{s^2} \qquad 3.32$$

Bölüm 3.1.1 de açıklandığı gibi ζ nin değerlerine göre sistemin cevabının ayrı ayrı incelenmesinde yarar vardır.

a-) ζ >1olan aşırı sönümlü sistemler

Bu durumda, sistemin kökleri yine denklem 3.19 daki gibi gerçek ve ayrık olacağından denklem 3.32 de verilen sistemin rampa cevabı, s-bölgesinde aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir..

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s^2+2\xi w_n s+w_n^{\,2})}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{K1}{s^2}+\frac{K2}{s}+\frac{K3}{s+s1}+\frac{K4}{s+s2} \qquad 3.33$$

Basit kesirlerin ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde sistemin cevabı,

$$y(t) = K_1 1 + K_2 u(t) + K_3 e^{s_1 t} + K_4 e^{s_2 t} \qquad 3.34$$

Burada,

$$K1 = 1 \qquad 3.35.a$$

$$K2 = -\frac{2\xi}{w_n} \qquad 3.35.b$$

$$K3 = -\frac{2\xi^2 - 1 - 2\xi\sqrt{\xi^2-1}}{2w_n\sqrt{\xi^2-1}} \qquad 3.35.c$$

$$K4 = \frac{2\xi^2 - 1 + 2\xi\sqrt{\xi^2-1}}{2w_n\sqrt{\xi^2-1}} \qquad 3.35.d$$

olarak basit kesirlere ayrıştırma sonucunda bulunan sabit katsayılardır.

b-) ζ =1 olan kritik sönümlü sistemler

Bu durumda, sistemin kökleri yine denklem 3.23 daki gibi gerçek ve katlı olacağından denklem 3.32 de verilen sistemin rampa cevabı, s-bölgesinde aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$Y(s)=\frac{w_n^{\,2}}{(s^2+2\xi w_n s+w_n^{\,2})}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{K1}{s^2}+\frac{K2}{s}+\frac{K3}{(s+s1)^2}+\frac{K4}{s+s1} \qquad 3.36$$

Basit kesirlerin ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde sistemin cevabı,

$$y(t)=K_1 t+K_2.u(t)+K_3 t.e^{s_1 t}+K_4 e^{s_1 t} \qquad 3.37$$

Burada,

$$K1=1 \qquad 3.38.a$$

$$K2=-\frac{2}{w_n} \qquad 3.38.b$$

$$K3=1 \qquad 3.38.c$$

$$K4=\frac{2}{w_n} \qquad 3.38.d$$

olarak basit kesirlere ayrıştırma sonucunda bulunan sabit katsayılardır.

c-) ζ <1 olan düşük sönümlü sistemler

Bu durumda, sistemin kökleri yine denklem 3.27 deki gibi karmaşık olacağından denklem 3.32 de verilen sistemin rampa cevabı, s-bölgesinde aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$Y(s)=\frac{w_n^{\,2}}{(s^2+2\xi w_n s+w_n^{\,2})}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{K1}{s^2}+\frac{K2}{s}+\frac{K3}{s+s1}+\frac{K4}{s+s2} \qquad 3.39$$

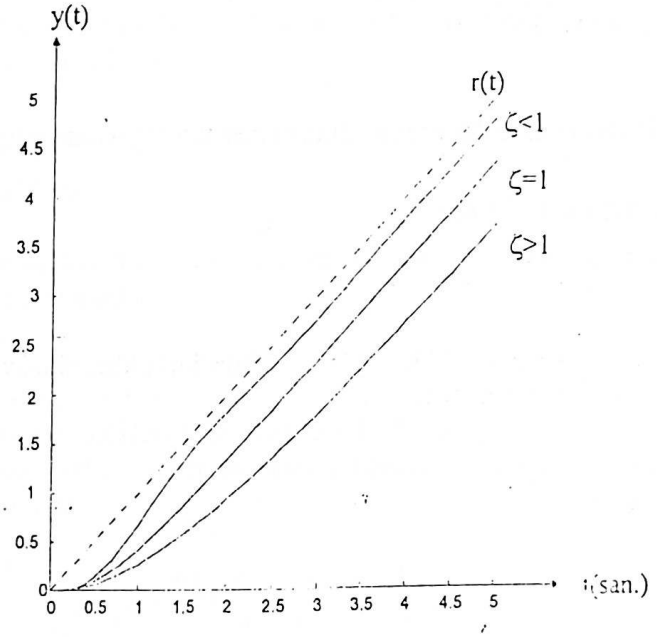
Basit kesirlerin ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde sistemin cevabı,

$$y(t)=t-\frac{2\xi}{w_n}+\frac{1}{w_d}.e^{-\alpha t}.\sin(w_d t+\theta) \qquad 3.40$$

Burada,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \qquad 3.41$$

wn=3 olan ve farklı sönüm oranlarına sahip sistemler için yukarıda bulunan birim rampa cevapları toplu olarak Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.7 İkinci dereceden sistemlerin birim rampa cevabı

İkinci dereceden sistemlerin birim rampa giriş için hata fonksiyonu,

$$e(t) = r(t) - y(t) = t - y(t) \qquad 3.42$$

olduğundan kalıcı durum hatası, yukarıda çıkarılan y(t) cevapları kullanılarak,

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{2\xi}{w_n} \qquad 3.43$$

olarak bulunur.Denklem 3.43 den görüldüğü gibi rampa girişlerde kalıcı durum hatası, sistemin dinamik davranış parametrelerine, yani ζ ve w_n e bağlıdır. Sistemin rampa giriş için kabul edilebilir kalıcı durum hatası sağlayabilmesi için sönüm oranının (ζ) oldukça küçük ve doğal frekansının da (w_n) yeteri kadar büyük olması gerekir. Şekil 3.7 den, sabit w_n değeri için sönüm oranı küçüldükçe kalıcı durum hatasının azaldığı görülmektedir.

3.2.3 İkinci Dereceden Sistemlerin Birim Ani Darbe Cevabı

Birim ani darbe fonksiyonu R(s) = 1 olarak tanımlandığına göre ikinci dereceden sistemin birim basamak cevabı s-bölgesinde denklem 3.16 dan aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^{\,2})} \qquad 3.44$$

Denklem 3.44 de, ζ nin 3 farklı durumuna göre sistemin cevabı ayrı ayrı aşağıdaki gibi belirlenebilir.

a-) ζ >1 olan aşırı sönümlü sistemler

Bu durumda, sistemin kökleri yine denklem 3.19 deki gibi gerçek ve ayrık olacağından denklem 3.44 de verilen sistemin ani darbe cevabı, s-bölgesinde aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^{\,2})} = \frac{K1}{s+s1} + \frac{K2}{s+s2} \qquad 3.45$$

olacaktır. Bu gerçek ve ayrık köklere göre denklem 3.45 in ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde ikinci dereceden sistemlerin birim ani darbe cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t) = K_1.e^{s1t} + K_2.e^{s2t} \qquad 3.46$$

Burada,

$$K1 = \frac{wn}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad 3.47.a$$

$$K2 = -\frac{wn}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad 3.47.b$$

olarak basit kesirlere ayrıştırma sonucunda bulunan sabit katsayılardır.

b-) ζ=1 olan kritik sönümlü sistemler

Bu durumda, sistemin kökleri yine denklem 3.24 deki gibi gerçek ve katlı olacağından denklem 3.44 de verilen sistemin ani darbe cevabı, s-bölgesinde aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^{\,2})} = \frac{K1}{(s+s1)^2} + \frac{K2}{s+s1} \qquad 3.48$$

olacaktır. Bu gerçek ve katlı köklere göre denklem 3.48 in ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde ikinci dereceden sistemlerin birim ani darbe cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t) = e^{-w_n t} + w_n t\, e^{-w_n t} \qquad 3.49$$

c-) ζ<1 olan düşük sönümlü sistemler

Bu durumda, sistemin kökleri yine denklem 3.27 deki gibi karmaşık olacağından denklem 3.44 de verilen sistemin ani darbe cevabı, s-bölgesinde aşağıdaki gibi basit kesirlerine ayrılabilir.

$$Y(s) = \frac{w_n^{\,2}}{(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^{\,2})} = \frac{K1}{s+s1} + \frac{K2}{s+s2} \qquad 3.50$$

olacaktır. Bu karmaşık köklere göre denklem 3.50 nin ters laplace dönüşümü alınırsa zaman bölgesinde ikinci dereceden sistemlerin birim ani darbe cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t) = e^{-\alpha t}\{\cos(w_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(w_d t)\} \qquad 3.51$$

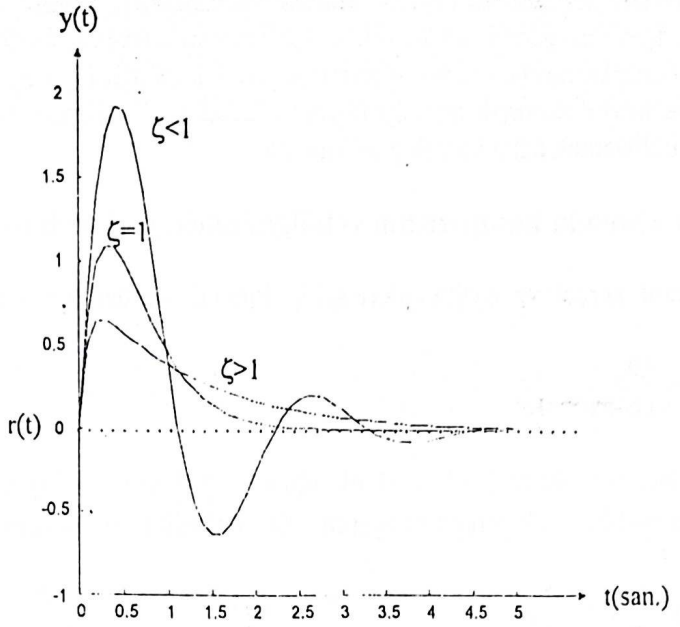
yada, trigonometrik işlemlerle,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}.e^{-\alpha t}.\sin(w_d t + \theta) \qquad 3.52$$

Burada,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \qquad 3.53$$

wn=3 olan ve farklı sönüm oranlarına sahip sistemler için yukarıda bulunan birim ani darbe cevapları toplu olarak Şekil 3.8 de verilmiştir.



Şekil 3.8 İkinci dereceden sistemlerin birim ani darbe cevabı

ikinci dereceden standart sistemlerin birim ani darbe giriş için kalıcı durum hatası, hata fonksiyonunun son değerlerinden belirlenebilir. Laplace bölgesinde,

$$ess = \lim_{s\to 0} s.\{R(s) - Y(s)\} = \lim_{s\to 0} s.\{1 - \frac{w_n^{\,2}}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^{\,2})}\} = 0 \qquad 3.54$$

olduğundan sönüm oranı ve doğal frekanstan bağımsız olarak kalıcı durum hatası oluşmayacaktır. Bu durum, Şekil 3.8 deki cevap eğrilerinden de görülmektedir.

3.3 Yüksek Dereceden Sistemlerin Zaman Bölgesi Karakteristikleri

Bölüm 3.2 de, birinci ve ikinci dereceden sistemlerin çeşitli giriş sinyallerine verdiği cevaplar analitik olarak incelenmiştir. Benzer şekilde, yüksek dereceden sistemlerinde çeşitli giriş sinyallerine verdiği cevaplar analitik olarak belirlenebilir. Örneğin,

$$T(s) = \frac{K.(s+z1)(s+z2)....(s+zm)}{(s+p1)(s+p2).....(s+pn)} \qquad 3.55$$

olarak verilen n. Dereceden bir sistemin herhangi bir R(s) girişine cevabı,

$$Y(s) = \frac{K.(s+z1)(s+z2)....(s+zm)}{(s+p1)(s+p2).....(s+pn)}.R(s) \qquad 3.56$$

ifadesinin ters laplace dönüşümü alınarak bulunabilir. Ancak, bu bölümde uzun ve karmaşık işlemler gerektiren denklem 3.56 nın ters laplace dönüşümünü almak yerine sistemin kutuplarının (gerekirse sıfırlarının) s-düzlemindeki yerine göre sistemin cevabını (özellikle birim basamak giriş için) yorumlamak ve bu yorum sonucuna göre sistemin cevabını belirlemek daha yararlı görülmüştür.

3.3.1 Bir sistemin kutuplarının s- bölgesindeki yeri ve baskın kutuplar

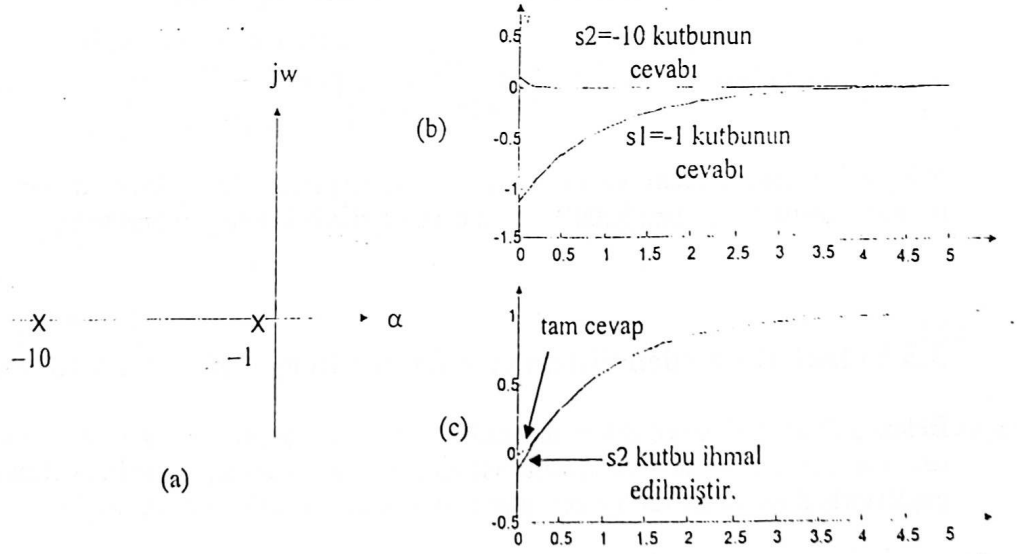
Örnek olarak gerçek ve ayrık köklere sahip ikinci dereceden bir sistemi ele alalım.

$$T(s)=\frac{10}{s^2+11s+10} \qquad 3.57$$

Bu sistemde, $wn=10$ *ve* $\zeta=1.74>1$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla sistemin kutupları s1=-1 ve s2=-10 olarak gerçek ve ayrıktır. Bu sistemin birim basamak cevabı da,

$$y(t)=u(t)-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t} \qquad 3.58$$

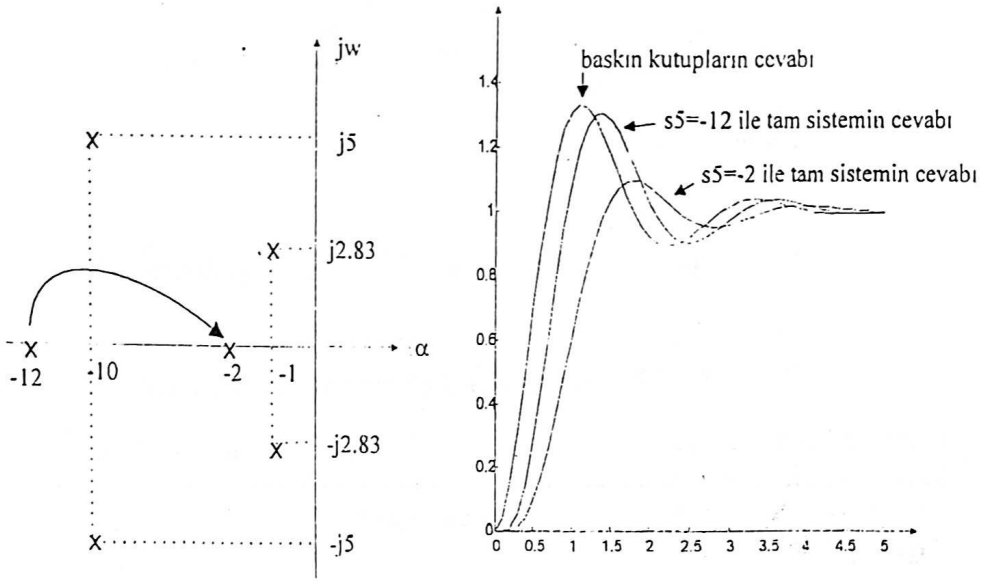
olarak bulunur. Buradan, s1=-1 kutbu ile ilgili zaman sabitesinin T1=1 saniye ve s2=-10 kutbu ile ilgili zaman sabitesinin ise T2=0.1 saniye olduğu belirlenebilir. Denklem 3.57 de verilen sistemin kutuplarını s-düzlemindeki yerleri ve her bir kutbun birim basamak davranışı şekil 3.9 da verilmiştir.



Şekil 3.9 İkinci dereceden bir sistemin s- düzlemindeki durumu

Buradan, bir sistemin kutuplarının s-düzleminde orjinden sola doğru uzaklaştıkça o kutupla ilgili zaman sabitesinin küçüldüğü ve dolayısıyla o kutbun cevabının çok hızlı olduğu, aynı zamanda o kutupla ilgili katsayının da küçüldüğü ve dolayısıyla o kutbun etkisinin genlik olarak da zayıfladığı vurgulanabilir. Bu durumda, orjinden uzakta olan bir kutbun etkisi oldukça zayıf olduğundan ihmal edilebilir ve sistemin davranışı, orjine yakın olan kutbun davranışına eşit kabul edilebilir. Orjine yakın olan kutup (yada kutuplar) **baskın kutuplar** olarak söylenir. Denklem 3.57 de verilen sistemde s1=-1

kutbu baskın olduğundan s2=-10 kutbunun etkisi ihmal edilebilir. Denklem 3.58 de, s2=-10 kutbu ile ilgili terim (son terim) ihmal edilse de sistemin cevabı yaklaşık aynı olacaktır. Şekil 3.10 da, 5. dereceden bir sistemin cevabı verilmiştir. Baskın olmayan kutuplar, orjine yaklaştıkça baskın kutupların cevabı da orjine yaklaşan kutba göre değişmektedir.



Şekil 3.10 Baskın kutuplara, baskın olmayan kutupların etkisi

3.3.2 s-düzleminde karmaşık kutuplarda sönüm oranı ve doğal frekans

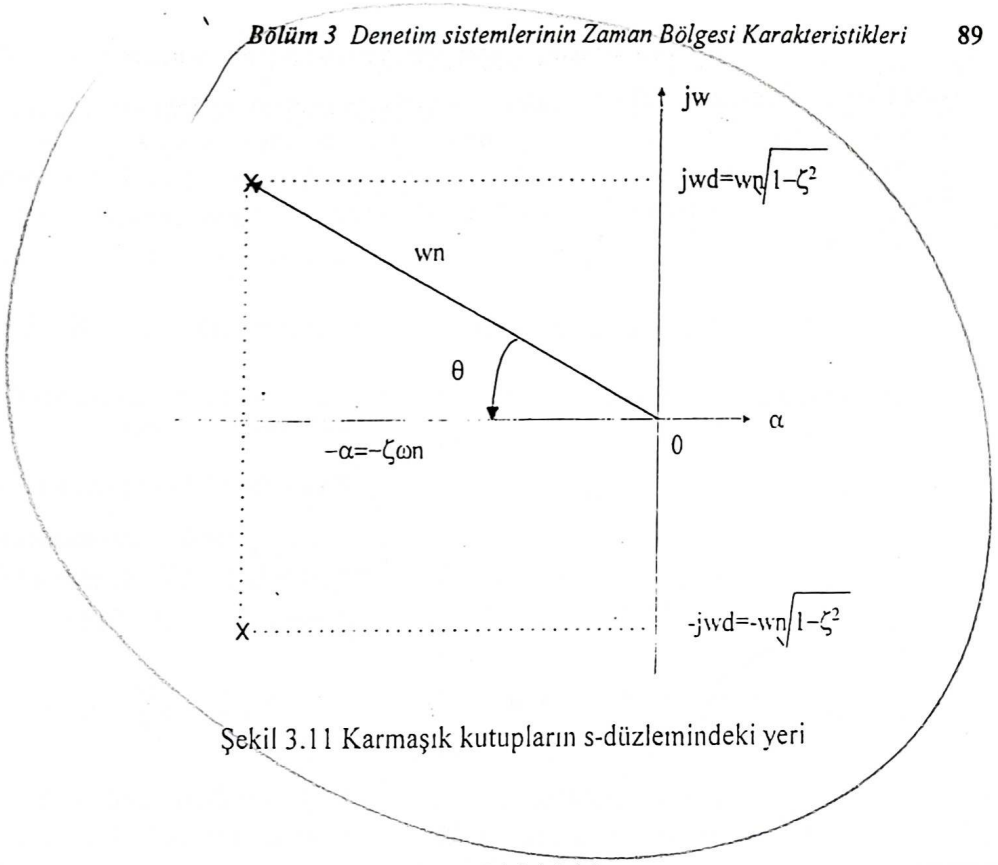
Bölüm 3.2 de açıklandığı gibi bir sistemin karmaşık kutupları eşlenik durumdadır ve sönüm oranı ve doğal frekans cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$s1,2 = -\zeta wn \pm jwn\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha \pm jwd \qquad 3.59$$

Karmaşık kutupların s-düzlemindeki yeri şekil 3.11 de verilmiştir. Şekil 3.11 den,

$$Cos(\theta) = \frac{\zeta wn}{wn} \Rightarrow \zeta = Cos(\theta) \qquad 3.60$$

olduğu görülmektedir. Diğer taraftan, wn arttıkça kutupların sola doğru uzaklaştığı, dolayısıyla sistemin cevap hızının arttığı vurgulanabilir.



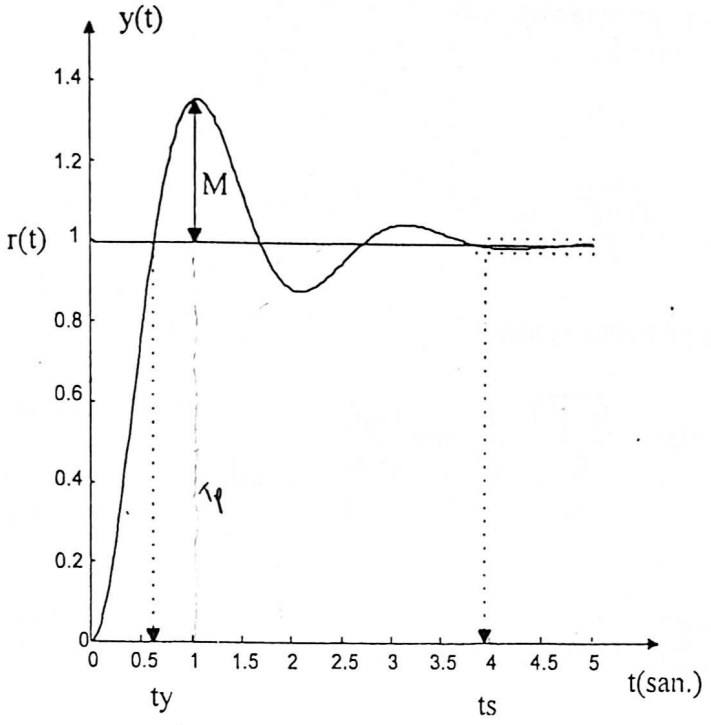
Şekil 3.11 Karmaşık kutupların s-düzlemindeki yeri

****

3.4 Denetim Kriterlerinin Matematiksel Tanımı

Pratik olarak basamak giriş fonksiyonunu üretmek kolay olup sistemin basamak giriş cevabının bilinmesi halinde matematiksel olarak sistemin diğer herhangi bir giriş cevabı da kolaylıkla hesaplanabilir. Bu nedenle, genellikle bir denetim sisteminin basamak cevabı analiz edilerek denetim sisteminin tasarım kriterlerini sistemin birim basamak üzerinde yorumlamak daha uygun olmaktadır. Bölüm 1 de, burada açıklanan denetim kriterleri genel olarak açıklanmıştı. Bu kısımda kriterlerin matematiksel olarak yorumu yapılacaktır.

Çoğunlukla denetim sistemlerinin geçici durum basamak cevabı, Şekil 3.12 den görüldüğü gibi kalıcı duruma erişinceye kadar sönümlü-salınımlı bir davranış gösterir ve denetim kriterleri de bu cevap üzerinde tanımlanır.



Şekil 3.12 Bir sistemin birim basamak cevabı ve denetim kriterleri

3.4.1 Gecikme zamanı,(t_g)

Gecikme zamanı, sistemin cevabının son değerinin yarısına ilk defa ulaşması için geçen zamandır. Birinci dereceden sistemlerde gecikme zamanı (tg), zaman sabiti T' ye eşittir. Gecikme zamanı, bir denetim kriteri olarak alınabilir ve matematiksel eşitliği çıkarılabilir ancak bunun yerine genellikle yükselme ve yerleşme zamanlarını kullanmak daha uygundur.

3.4.2 Yükselme zamanı,(t_y)

Yükselme zamanı bir sistemin birim basamak cevabının %0 dan %100 değerine (bazen bu sınırlar % 10 - % 90 yada %5- %95 olarak da alınabilir) erişinceye kadar geçen zamandır. Aşırı sönümlü sistemler için genellikle % 0-100, sönümlü-salınımlı sistemlerde ise genel olarak % 10-90 yükselme zamanı kullanılır. Burada, yükselme zamanı %0-%100 olarak alınarak matematiksel eşitliği çıkarılacaktır.

Düşük sönümlü ikinci dereceden sistemlerin Şekil 3.12 deki cevap eğrisini veren zaman bölgesindeki matematiksel ifadesi Denklem 3....de çıkarılmıştı. Bu denklemde t=ty için sistemin cevabı birim değerini aldığına göre,

$$y(t_y) = 1 = 1 - e^{\xi w t y}\left(\cos w_d ty + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d ty\right) \qquad 3.61$$

Denklem 3.61 in sadeleştirilmesiyle,

$$\cos w_d t_y + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t_y = 0 \qquad 3.62$$

veya

$$\tan w_d t_y = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \frac{wd}{-\alpha} \qquad 3.63$$

Buradan yükselme zamanı, t_y;

$$ty = \frac{1}{w_d} \arctan\left(-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \frac{1}{wd} \arctan\left(\frac{wd}{-\alpha}\right) \qquad 3.64$$

Burada,

$$\arctan\left(\frac{wd}{-\alpha}\right) = -\beta = \pi - \beta$$

olduğundan yükselme zamanı kısaca,

$$ty = \frac{\pi - \beta}{w_d}$$

olarak yazılabilir. Denklem 3.64 den, sabit bir sönüm oranı için yükselme zamanının, t_y küçük tutulabilmesi için doğal frekansın w_n artırılması gerekir.

Yükselme zamanı, cevap eğrisindeki sönüme neden olan üstel terimindeki wn.ty nin sönüm oranına göre doğrusal yada eğrisel değişimi yaklaşık olarak tanımlanarak da çıkarılabilir. Doğrusal yaklaşımla yükselme zamanı yaklaşık,

$$ty = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{wn}$$

olarak da tanımlanabilir.

3.4.3 Tepe zamanı,(t_p)

Tepe zamanı, sistemin basamak cevabının son değerini ilk defa aşarak bir tepe yaptığı noktaya eriştiği zamandır. Dolayısıyla tepe noktalarında cevap eğrisinin türevleri sıfır olacak yani ekstremum noktaları oluşacaktır. Buna göre Şekil 3.12 deki eğrinin matematiksel ifadesinin türevi alınırsa,

$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=tp} = (\sin w_d t_p) \frac{w_n}{1-\xi^2} e^{-\xi w n t p} = 0 \qquad 3.65$$

Denklem 3.65 i sıfır yapan koşul ,

$$(\sin w_d t_t) = 0 \qquad 3.66$$

Buna göre,

$$wd.tp = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,..... \qquad 3.67$$

Tepe zamanı, ilk aşmanın oluştuğu zaman olduğuna göre,

$$w_d tp = \pi \text{ veya } t_p = \frac{\pi}{w_d} = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad 3.68$$

3.4.4 Maksimum aşma (M):

Maksimum aşma, sistemin birim basamak cevap eğrisinin son değeri ile ilk eriştiği tepe noktası arasındaki fark değerdir. Yüzde olarak maksimum aşma aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\%M = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}.100 \qquad 3.69$$

Maksimum aşmanın değeri, doğrudan doğruya sisteminin bağıl kararlılığı ile ilgilidir. Kritik yada aşırı sönümlü sistemlerde, cevap eğrisi hiçbir zaman son değerini aşmadığından maksimum aşma sıfır olacaktır. Maksimum aşma, tepe zamanında meydana geldiğine göre denklem 3.69 da t yerine t_p değeri yazılarak,

$$M = y(tp) - 1 = 1 - e^{-\zeta w_n(\pi/w_d)}(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi) - 1 \qquad 3.70$$

buradan,

$$M = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \qquad 3.71$$

elde edilir. Görüldüğü gibi maksimum aşma değeri, sadece sönüm oranına (ζ) bağlı olup doğal frekanstan, w_n bağımsızdır.

3.4.5 Yerleşme zamanı (ts) :

Yerleşme zamanı, sistemin basamak cevap eğrisinde salınım genliklerinin müsaade edilebilir tolerans değeri sınırlarına erişmesi için geçen zaman olarak tanımlanır. Müsaade edilebilir tolerans değerleri ise genellikle son değerin % 5 veya % 2 sidir. Yerleşme zamanı denetim sisteminde tanımlanan en büyük zaman sabitidir.

Düşük sönümlü ikinci dereceden bir sistemin birim basamak denklem 3.... ile verilmişti. Bu ifadede üstel çarpan, sinüssel bileşeni sönüme götüren bileşendir ve bu bileşenin zaman sabiti

$$T = \frac{1}{\zeta w n} \qquad 3.72$$

olup cevap eğrisinin azalma hızı, bu zaman sabitine bağlıdır. Dolayısıyla cevap eğrilerinin %2 yada %5'lik tolerans aralığına girdikleri zamana karşılık gelen yerleşme zamanı, denklem 3.72 de verilen zaman sabiti cinsinden ölçülebilir. Farklı sönüm oranı değerleri ve tolerans aralıkları için cevap eğrileri çizilerek bu eğrilerden yerleşme zamanları belirlenebilir. Sönüm oranının $0 < \zeta < 0.9$ aralığında %2'lik tolerans bandı için yerleşme zamanın, sistemin zaman sabitinin yaklaşık dört katı olduğu,

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad 3.73$$

%5 lik tolerans bandı için ise yerleşme zamanının, sistemin zaman sabitesinin yaklaşık 3 katı olduğu,

$$t_s = 3T = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad 3.74$$

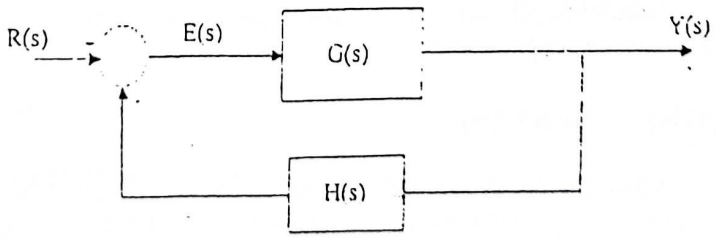
kabul edilebilir.

3.4.6 Kalıcı durum hataları

Denetim sistemi tasarımının temel amaçlarından bir tanesi de sistemin, herhangi bir referans girişi sürekli durumda hatasız olarak izlemesidir. Bu bölümde, çeşitli sistemlerin çeşitli giriş fonksiyonları için Kalıcı durum hatalarının analizi verilecek ve denetim sistemlerinin tasarımında kullanılan bir kriter olarak sürekli durum hata katsayıları tanımlanacaktır.

Denetim Sistemlerinin Tipi

Şekil 3.13 de verilen kapalı çevrim denetim sistemini ele alalım.



Şekil 3.13 kapalı çevrim denetim sistemi

Şekil 3.13 deki denetin sisteminin açık çevrim transfer fonksiyonu genel olarak s-e bağlı polinomlar oranı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(s)H(s) = \frac{b_n s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots a_0} \qquad 3.75$$

Burada, n- sistemin derecesi, m- pay polinomunun derecesi olup nedensel fiziksel sistemler için her zaman m<n dir. Denklem 3.75 de verilen transfer fonksiyonu, çarpanlarına ayrılmış düzende aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(s)H(s) = \frac{K.(s+z1)(s+z2)....(s+zm)}{(s+p1)(s+p2).....(s+pn)} \qquad 3.76$$

Burada, zi-sistemin sıfırları, pj-sistemin kutuplarıdır ve bu değerler gerçek yada karmaşık birer sayı olabilecekleri gibi sıfır da olabilirler. Bir sistemde bazı kutupların (örneğin r adet) sıfır olması durumunda denklem 3.76 ile tanımlanan transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$G(s)H(s) = \frac{K.(s+z_1)(s+z_2).....(s+z_m)}{s^r.(s+p_{r+1})(s+p_{r+2}).....(s+p_n)} \qquad 3.77$$

Denklem 3.77 de r, diğer bir ifade ile orjindeki kutup sayısı denetim sisteminin tipini gösterir. Örneğin r=0 için Tip-0 sistem, r=1 için Tip-1 sistem olarak söylenir.

Kalıcı durum hatası

Şekil 3.13 de verilen kapalı çevrim denetim sisteminde hata fonksiyonu E(s),

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) \qquad 3.78$$

olarak elde edilebilir. Eğer denetim sistemlerinde hata fonksiyonu, E(s)=R(s)-Y(s) olarak alınırsa H(s) geri besleme transfer fonksiyonunun birim olmaması durumunda denklem 3.78 hata fonksiyonuna karşı gelmez. Ancak, H(s) in genellikle farklı bir fiziksel büyüklüğe sahip olan sistem çıkışını { Y(s) }, elektriksel büyüklüğe dönüştüren bir algılayıcı olduğu dikkate alınırsa denklem 3.78 referans giriş büyüklüğü cinsinden sistemin hata fonksiyonunu tanımlayacaktır. Bu durumda sistemin kalıcı durum hatası, herhangi bir giriş fonksiyonu için hata fonksiyonunun son değerinden belirlenebilecektir.

$$ess = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\{s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)\} \qquad 3.79$$

Denklem 3.79 kullanılarak herhangi bir giriş fonksiyonu için sistemin kalıcı durum hatası belirlenebilmekle birlikte genellikle denetim sistemi tasarımında çeşitli test sinyalleri için tanımlanan hata katsayıları kullanılır.

Konum hata katsayısı

Basamak giriş sinyalleri için denklem 3.79 dan yararlanarak tanımlanan hata katsayısı konum hata katsayısı olarak söylenir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Basamak giriş fonksiyonunun laplace dönüşümü R(s)=A/s olduğuna göre denklem 3.79,

$$ess = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\{s\frac{1}{1+G(s)H(s)}\frac{A}{s}\} = \frac{A}{1+\lim_{s\to 0} G(s)H(s)} \quad 3.80$$

olur. Burada konum hata katsayısı,

$$Kp = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) \quad 3.81$$

olarak tanımlanırsa basamak girişler için kalıcı durum hatası,

$$ess = \frac{A}{1+Kp} \quad 3.82$$

olacaktır.

Hız hata katsayısı

Rampa giriş sinyalleri için denklem 3.79 dan yararlanarak tanımlanan hata katsayısı hız hata katsayısı olarak söylenir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Rampa giriş fonksiyonunun laplace dönüşümü $R(s)=A/s^2$ olduğuna göre denklem 3.79,

$$ess = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\{s\frac{1}{1+G(s)H(s)}\frac{A}{s^2}\} = \frac{A}{0+\lim_{s\to 0} s.G(s)H(s)} \quad 3.83$$

olur. Burada hız hata katsayısı,

$$Kv = \lim_{s\to 0} s.G(s)H(s) \quad 3.84$$

olarak tanımlanırsa rampa girişler için kalıcı durum hatası,

$$ess = \frac{A}{Kv} \quad 3.85$$

olacaktır.

İvme hata katsayısı

Parabolik giriş sinyalleri için denklem 3.79 dan yararlanarak tanımlanan hata katsayısı ivme hata katsayısı olarak söylenir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Parabolik giriş fonksiyonunun $(At^2/2)$ laplace dönüşümü $R(s)=A/s^3$ olduğuna göre denklem 3.79,

$$ess = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\{s\frac{1}{1+G(s)H(s)}\frac{A}{s^3}\} = \frac{A}{0+\lim_{s\to 0} s^2.G(s)H(s)} \quad 3.86$$

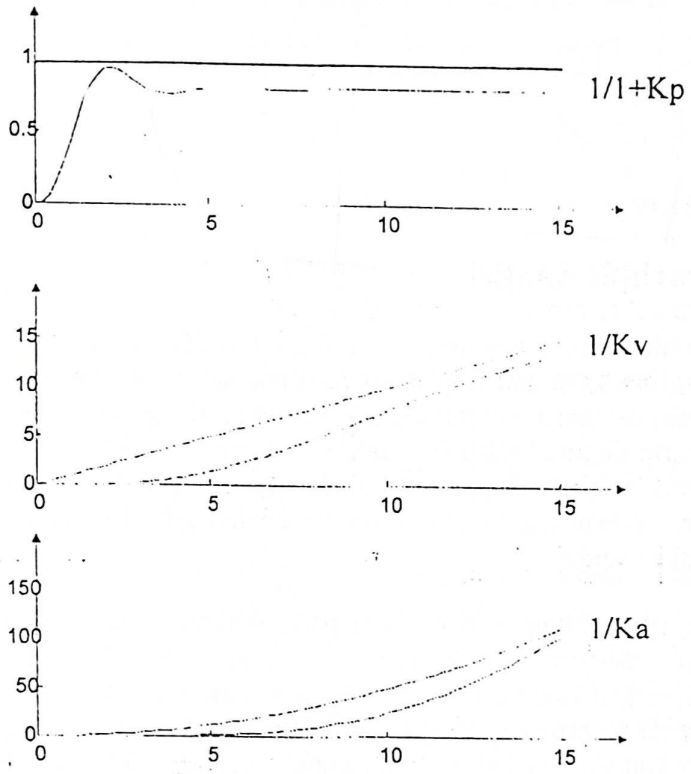
olur. Burada ivme hata katsayısı,

$$Ka = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s) \qquad 3.87$$

olarak tanımlanırsa parabolik girişler için kalıcı durum hatası,

$$ess = \frac{A}{Ka} \qquad 3.88$$

olacaktır.



Şekil 3.14 örnek bir sistemin çeşitli giriş fonksiyonları için kalıcı durum hataları

Sistem tiplerine göre kalıcı durum hataları

Yukarıda tanımlanan hata katsayılarına göre çeşitli tipteki sistemlerin kalıcı durum hataları belirlenebilir. Denklem 3.81, 3.84 ve 3.87 kullanılarak çeşitli tipteki sistemlerin hata katsayıları ve bulunan hata katsayılarına göre de Denklem 3.82, 3.85 ve 3.86 dan kalıcı durum hataları bulunursa aşağıdaki tablo elde edilecektir.

Sistem tipi	Kp	Kv	Ka	Kalıcı durum hataları ess		
				Basamak	Rampa	Parabolik
0	Kp	0	0	A/1+Kp	sonsuz	sonsuz
1	sonsuz	Kv	0	0	A/Kv	sonsuz
2	sonsuz	sonsuz	Ka	0	0	A/Ka
3	sonsuz	sonsuz	sonsuz	0	0	0

3.5 Kararlılık Analizi

Bir sisteminin dinamik davranışının en önemli özelliği kararlılığıdır. Kararlı bir sistem, sınırlı bir girişe karşı sınırlı bir çıkış cevabına sahip olan ve bir bozucu giriş karşında geçici durum davranışını gösterdikten sonra tekrar denge konumuna dönen sistem olarak tanımlanır. Bir doğrusal sistemin kararlı olup olmadığı o sistemin kendisine ait bir özellik olup sistemin girişinden bağımsızdır. Dolayısıyla giriş fonksiyonunun kutupları, sistemin kararlılığını etkilemez ancak, yukarıda açıklandığı gibi sistemin kalıcı durum davranışı üzerinde etkisi vardır.

Bir sistemin kararlılığının, sistemin transfer fonksiyonunun kutuplarının yani sistemin karakteristik denkleminin köklerinin karmaşık s- bölgesindeki yerlerine göre belirlenebileceğini vurgulamıştık. Bir sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart, sistem transfer fonksiyonu kutuplarının negatif gerçek kısımlara sahip olmasıdır. Transfer fonksiyonu kutuplarının karmaşık düzlemdeki yeri sistemin kararlılığı yanında sistemin dinamik davranışını da tanımlar. Bu yönde "s""in bir polinomu olan karakteristik denklemin köklerini bulmak suretiyle hem sistemin kararlılığı hakkında ve hem de dinamik davranışı hakkında bir fikir sahibi olunur.

Kapalı-çevrim bir denetim sisteminin transfer fonksiyonu en genel hali ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K \frac{\sum_{i=1}^{m} (s + zi)}{\sum_{j=1}^{n} (s + pj)} \qquad 3.89$$

Burada karakteristik denklemin kökleri olan sistem kutupları pj = 0, pj = -a, yada pj = -a ± jb gibi karmaşık kök çifti şeklinde olabilir. Sistemin orjinde kutbunun olmadığını ve *toplam n adet kutbun x adedinin gerçek, y adedinin de karmaşık eşlenik durumda olduğunu kabul edersek sistemin birim ani darbe cevabı* aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{x} K_i e^{p_i t} + \sum_{j=i+1}^{x+y/2} K_j e^{p_j t} Sin(wd_j t + \theta_j) \qquad 3.90$$

Kısaca sistemin zaman bölgesi cevabı, üstel ve sönümlü sinüsoidal ifadelerden ibarettir. Buna göre böyle bir sistemin cevabının sınırlı bir giriş için sınırlı kalabilmesi, diğer deyişle kararlı olabilmesi için kutuplarının gerçek kısımlarının negatif değerli (-a) olması yani kutupların sol yarı s-düzleminde yer alması gerekir.

Buna karşılık s-düzleminin sağ yarısında yer alan gerçek kısımları pozitif işaretli kökler için cevap eğrisi ya üstel artan yada genlikleri sürekli şekilde artan sinüsoidal şekilde olacaktır. Bu durum, kararsız sistemlere karşılık gelir. Gerçek kısmı sıfır olup sanal eksen üzerinde yer alan köklere karşılık sistem cevabı sönümsüz bir sinüsoidal olup bu durum kararlılık ile karasızlık arasında kritik bir noktaya karşılık gelir. Sonuç olarak bir sistemin mutlak olarak kararlı olabilmesi için tüm kutuplarının sol ayrı düzlem içinde yer alması gerekir. Kutupların bir tanesi bile sağ yarı düzlemde yer alırsa sistem kararsız olur.

Bir denetim sisteminin kararlılığının belirlenmesi için kapalı çevrim transfer fonksiyonunun paydası olan karakteristik denkleminin köklerinin belirlenmesi gerekir. Karakteristik denklemin derecesi büyüdükçe köklerin bulunması zorlaşır. Bu durumda köklerin bulunmasına gerek kalmadan kararlılığın incelenmesi gerekli olabilir. Karmaşık s-düzleminde bir sistemin kutuplarının bulunmasına gerek kalamadan kararlılığın incelenmesi Routh –Hurwitz kararlılık kriteri ile yapılabilir.

3.5.1 Routh-Hurwitz Kararlılık Analizi

Kısaca Routh kriteri olarak da bilinen kararlılık kriteri, birbirinden bağımsız olarak ilk önce 1895'de A. Hurtwitz ve daha sonra 1905'de E.J. Routh tarafından geliştirilmiştir. Routh-Hurwitz kriteri, bir denklemin pozitif gerçek kısımlı köklerinin bulunup bulunmadığını, denklemi çözmeden belirlemeye yarar. Routh-Hurwitz kriteri özellikle yüksek dereceden denklemlerin köklerinin incelenmesinde önemli kolaylık sağlar. Dolayısıyla bir denetim sisteminin kararlılığı da bu yöntemle karakteristik denklemin köklerinden incelenebilir. Genel olarak bir sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 s + a_0 = 0 \qquad 3.91$$

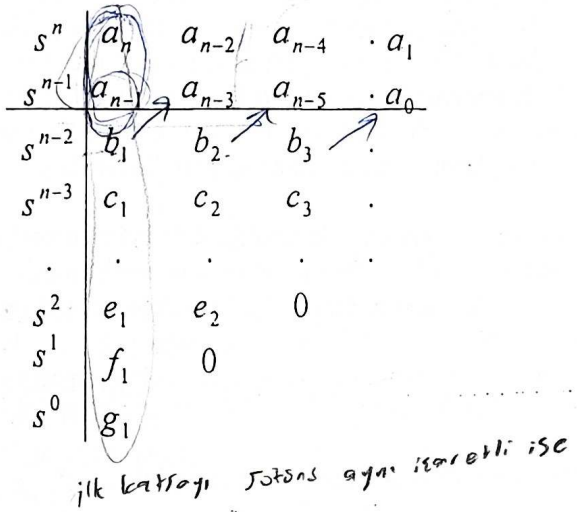
Bu denklemin normalize edildiği, dolaysıyla $a_n>0$ olduğu kabul edilebilir. Routh-Hurwitz kriterine göre Denklem 3.91 de verilen denklemin bütün köklerinin karmaşık s-düzleminin sol yarı bölgesinde olabilmesi için bazı gereklilik ve yeterlilik koşullarının sağlanması gerekir.

Gereklilik koşulları

- Denklem 3.91 in bütün köklerinin sol yarı s- düzleminde olabilmesi, dolaysıyla kararlı olabilmesi için denklemin tüm katsayılarının, a_i, i = 0,1,2,... n pozitif (yada aynı işaretli) ve sıfırdan farklı olması gerekir. Aksi halde sistem ya kararsız yada karasızlık sınırındadır. Ancak, bu koşulun sağlanması kararlılığın kesin olması için yeterli değildir.

Yeterlilik Koşulları

- Gereklilik koşullarını sağlayan bir sistemin kararlılığının kesin olarak belirlenebilmesi için Routh tablosu kullanılır. Bu tablonun birinci sütunundaki bütün değerlerin aynı işaretli olması durumunda sistem kesin olarak kararlıdır denir. Routh tablosu, aşağıda verilmiştir.



Tablonun ilk iki satırına verilen denklemin katsayıları yazılmaktadır. İlk iki satırdan sonraki satırlardaki katsayılar, sıra ile üsteki son iki satırın katsayılarından yararlanılarak hesaplanmaktadır. Diğer satırların katsayıları aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

$$b1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad 3.92$$

$$b3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}.a_{n-6} - a_n.a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

Benzer kurallarla izleyen satırların da katsayıları belirlenebilir. Örneğin,

$$c1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1.a_{n-3} - b_3.a_{n-1}}{b_1}$$

$$c2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1.a_{n-5} - b_3.a_{n-1}}{b_1} \qquad 3.93$$

Gereklilik şartını sağlayan bir sistemin kararlı olabilmesi için Routh tablosunun birinci sütunundaki elemanlarda işaret değişikliği olmaması gerekir. Birinci sütundaki işaret değişikliğinin sayısı, sistemin sağ yarı s-düzlemindeki kutuplarının da sayısını verir.

Örnek 3.

$s^4 + 2s^3 + 4s + 5 = 0$

verilen sistemin karalı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

Verilen sistem gereklilik koşulunu sağlamadığından kararsızdır.

s^2 yok

Örnek 3.

$s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 10s + 6 = 0$

Karakteristik denklemi verilen sistemin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Çözüm

Verilen denklem gereklilik koşulunu sağladığından kesin olarak kararlılığını belirleyebilmek için Routh tablosu oluşturulmalıdır.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{3}$$

s^5	1	7	10
s^4	3	3	6
s^3	6	8	0
s^2	−1	6	
s^1		0	
s^0	6		

2 işaret değişikliği vardır

s^5	1	7	10
s^4	3	3	6
s^3	q_1	q_2	q_3
s^2			
s^1			
s^0			

Birince sütunda işaret değişikliğ olduğundan sistem kararsızdır ve iki adet işaret değişimi olduğundan sistemin iki kökü sağ yarı düzlemdedir. Gerçekten de sistemin kökleri bulunursa,

$p_{1,2} = -1.6030 \pm 2.0040j$

$p_{3,4} = 0.3980 \pm 1.1773j$

$p_5 = -0.5899$

p3,4 kutuplarının sağ yarı s düzleminde olduğu görülür.

Özel Durumlar

Routh-Hurtwitz kriterinde genel kurallara uymayan ve tablonun oluşturulmasında ek bilgilere ihtiyaç duyan birkaç özel durum mevcuttur.

1.) Tablonun ilk sütununda bir eleman sıfır oluyorsa,

Bu durumda sıfır yerine, sonlu en küçük bir pozitif ε değeri konularak tablonun tablo tamamlanır. Dolayısıyla tablonun sonraki elemanlarının bir kısmı bu değere bağlı olacaktır. Tablo tamamlandıktan sonra $\varepsilon \longrightarrow 0$ yapılarak elemanın pozitif yada negatif bir değere yakınsadığı belirlenir.

Örnek 3.

$$4s^6 + 3s^5 + 10s^4 + 6s^3 + 8s^2 + 3s + 5 = 0$$

Karakteristik denklemi verilen sistemin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

Routh tablosu oluşturulursa,

s^6	4	10	8	5
s^5	3	6	3	0
s^4	2	4	5	
s^3	$0 = \varepsilon$	-4.5		
s^2	$k1$	5		
s^1	$k2$	0		
s^0	5			

$$k1 = \frac{4\varepsilon + 9}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon \to 0} k1 = +\infty$$

$$k2 = -4.5 - \frac{5\varepsilon^2}{4\varepsilon + 9} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon \to 0} k2 = -4.5$$

Tabloda, $\varepsilon \to 0$ iken k1ı pozitife, k2 ise negatife gider. Dolayısıyla sistem kararsızdır ve sağ yarı düzlemde 2 adet kök vardır. Gerçekten de denklemin köklerine bakılırsa,

$p_{1,2} = -0.0758 \pm 1.3011j$

$p_{3,4} = -0.6739 \pm 0.6874j$

$p_{5,6} = 0.3747 \pm 0.8085j$

$p_{5,6}$ köklerinin sağ yarı s-düzleminde olduğu görülmektedir.

2.) Tablonun bir satırının tüm elemanların sıfır olması,

Kararsız ya da sınırlı kararlı sistemlerde bir satırının tüm elemanları sıfır olan bir Routh tablosu ile karşılaşılır. Elemanları sıfır olan satırın bir üst satırına göre yazılan polinomun (örneğin P(s) polinmomu) s- göre türevinin katsayıları, elemanları sıfır çıkan satırın katsayıları olarak alınır ve tabloya devam edilir.

Tüm elemanları sıfır olan bir satır, sanal eksene göre simetrik olarak yerleşmiş köklerin varlığını gösterir. Bu kökler, aynı büyüklükte fakat zıt işaretli gerçek kökler (s= ± p), simetrik-sanal kök çifti (s= ±α± jw) ya da simetrik-karmaşık kök çifti (s= ±α±jw) şeklinde olabilir. P(s) polinomunun derecesi kadar kök, simetriktir.

Örnek 3;

$$2s^6 + 4s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 7s^2 + 8s + 4 = 0$$

Karakteristik denklemi verilen sistemin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

Routh tablosu oluşturulursa,

s^6	2	5	7	4
s^5	4	6	8	0
s^4	2	3	4	
s^3	(0)8	(0)6		
s^2	1.5	4		
s^1	−16	0		
s^0	4			

$$\Rightarrow \quad P(s) = 2s^4 + 3s^2 + 4$$

$$\Leftarrow \quad \frac{d}{ds}P(s) = 8s^3 + 6s$$

Tabloda bir satırın tüm elemanlarının sıfır çıkması durumunda, bir üst satırın polinomu yazılarak bu polinomun s' e göre alınan türevinden elde edilen polinomun katsayıları, eleman değerleri sıfır olan satırın eleman değerleri olacaktır. Sonuç tablonun ilk sütununa bakılırsa sistemin kararsız olduğu ve iki adet kökün sağ yarı s-düzleminde olduğu anlaşılmaktadır. Sitemin kök değerleri,

$p_{1,2} = 0.5763 \pm 1.0402j$

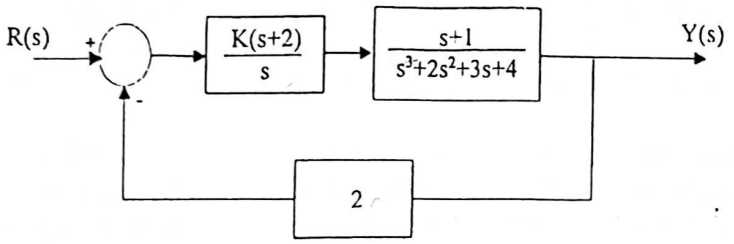
$p_{3,4} = -0.5763 \pm 1.0402j$

$p_5 = -1.0000$

$p_6 = -1.0000$

olarak bulunur. Sistemin p1,2 ve p3,4 kökleri, aynı zamanda P(s) polinomunun da kök değerleridir ve aynı zamanda P(s) polinomunun derecesi kadar kök (p1,2 ve p3,4 olarak 4 adet kök) simetrik durumdadır.

Örnek 3.



Şekilde verilen denetim sisteminin kararlı olabilmesi için denetleyici parametresi K' nın ne olması gerekir.

Çözüm

Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu genel olarak G(s) ileri besleme yönündeki transfer fonksiyonunu, H(s) ise geri besleme yönündeki transfer fonksiyonunu göstermek üzere,

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

olduğundan, kapalı çevrim denetim sisteminin karakteristik denklemi,

$$1+G(s)H(s)=0$$

olacaktır. Buna göre karakteristik denklem,

$$1+\frac{K(s+2)(s+1)}{s(s^3+2s^2+3s+4)}.2=0$$

düzenlenirse,

$$s(s^3+2s^2+3s+4)+2.K(s+2)(s+1)=0 \Rightarrow s^4+2s^3+(3+2K)s^2+(4+6K)s)+4.K=0$$

Karakteristik denklemin katsayıları Routh tablosuna yerleştirilirse,

s^4	1	$3+2K$	$4K$
s^3	2	$4+6K$	0
s^2	$1-K$	$4K$	0
s^1	$(-6K^2-6K+4)/(1-K)$	0	
s^0	$4K$		

Tablonun ilk sütunundaki K ya bağlı elemanların pozitif olabilmesi için,

$$4K > 0 \quad \Rightarrow \quad K > 0$$

$$1 - K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 1$$

$$-6K^2 - 6K + 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad -(K + 1.4574)(K - 0.4574) > 0 \quad \Rightarrow K > -1.4574 \, , \; K < 0.4574$$

Bulunan koşulların değerlendirilmesinden, sistemin kararlı olabilmesi için K' nın sınırları,

$$0 < K < 0.4574$$

olacaktır.

ÖĞRENCİ
Bilgisayar & Kırtasiye - Fotokopi
Tez Merkezi
Tel: (0424) 2[illegible] 5[illegible] Hazar VD. 253 011 3811

FOTOKOPİ
VF TEZ MERKEZİ
İnönü Cad. Yıldız Sok. No 37/B
Tel (0424) 238 92 92 ELAZIĞ
Hazal VD 067 031 6484

Bölüm 4

DENETLEYİCİLER VE KOMPANZATÖRLER

Giriş

Önceki bölümlerde, denetim sistemlerinin analizine yönelik teorik temeller verilmiştir. Kapalı çevrim bir denetim sistemi göz önüne alınırsa bir denetim sisteminin tasarımının üç aşamada gerçekleştirilebileceği söylenebilir.

- Sistemden beklenen denetim kriterlerinin belirlenmesi,
- Denetleyici yada kompanzatörün seçimi ve denetim yapısının belirlenmesi,
- Denetleyici yada kompanzatörün tasarımı yani, denetim kriterlerini karşılayacak şekilde parametrelerinin belirlenmesi.

Bölüm 3 de, sistemlerin zaman bölgesi analizi yapılarak denetim kriterleri belirlenmişti. Bu bölümde, endüstriyel denetim sistemlerinde yaygın olarak kullanılan denetleyiciler ve kompanzatörler ile denetim yapıları incelenecek ve bu denetleyicilerin, denetim sisteminin performansı üzerindeki etkileri verilecektir. İlerleyen bölümlerde ise denetim sistemlerinin tasarımı üzerinde durulacaktır.

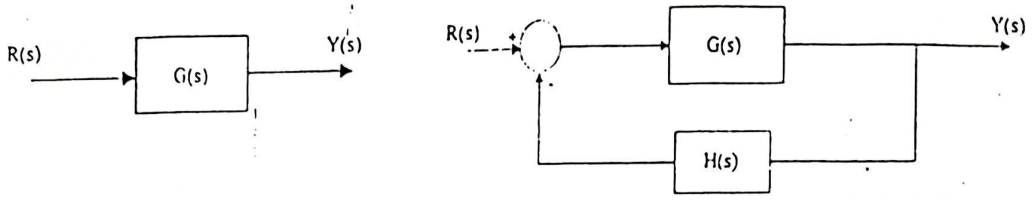
4.1 Denetim Sistemlerinde Geri Beslemenin Etkileri

Bölüm 1 de, denetim sistemlerini yapısal olarak sınıflandırırken geribeslemeli denetim sisteminin parametre değişimlerine ve bozucu girişlere karşı daha dayanıklı olduğu belirtilmişti. Ancak genel ifadelerle açıklanan geribeslemenin bu özelliklerinin yanı sıra denetim sistemi üzerinde daha birçok önemli etkisi de bulunmaktadır.

4.1.1 Geribeslemenin parametre değişimleri üzerine etkisi – Duyarlılık

Sistemdeki parametre değişiminin, sistemin çıkışını ne ölçüde etkilediğinin bir ölçütü olan duyarlılık yada duyarlılığın tersi anlamında olan dayanıklılık, denetim sistemlerinin tasarımında dikkate alınması gereken önemli bir kriter durumundadır. Her ne kadar fiziksel sistemlerin çoğunda parametreler sabit kabul edilse de sistemin çalışma şartlarına göre değişebilir. Dolayısıyla iyi bir denetim sistemi, sistemdeki parametre değişimlerine karşı duyarsız yada karşıt bir ifade ile parametre değişimlerine karşı dayanıklı olmalıdır.

Bu açıdan bakıldığında, denetim sistemlerinde geribesleme kullanmanın en önemli amaçlarından biri, parametre değişimlerine ve beklenmedik bozucu girişlere karşı sistemin duyarlılığını azaltmak olarak söylenebilir.



Şekil 4.1 a-) Açık çevrim ve b-) kapalı çevrim (geribeslemeli) sistemler

Matematiksel olarak duyarlılık, T(s) sistemin toplam transfer fonksiyonu, G(s) ileri besleme yönündeki transfer fonksiyonunu (sistemin transfer fonksiyonu) ve H(s) ise geri besleme transfer fonksiyonu ise, G(s) deki değişimlere T(s) in duyarlılığı; T(s) deki yüzde değişimin, G(s) deki yüzde değişime oranı olarak tanımlanır.

$$S_G^T = \frac{\partial T / T}{\partial G / G} = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T} \qquad 4.1$$

Bu tanıma göre, Şekil 4.1 de verilen açık çevrim ve kapalı çevrim sistemlerde, G(s) deki değişimin toplam transfer fonksiyonunu yada sistemin çıkışını nasıl etkilediği belirlenebilir. Şekil 4.1.a da T(s)=G(s), dolayısıyla $\partial T / \partial G = 1$ olduğuna göre,

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T} = 1.1 = 1 \qquad 4.2$$

olur ki G(s) deki değişimin doğrudan çıkışı etkilediği söylenebilir. Bu sisteme, şekil 4.1b deki gibi geri besleme yapılırsa,

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad 4.3$$

ve,

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = \frac{1}{\{1 + G(s)H(s)\}^2}$$

olduğuna göre,

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T} = \frac{1}{\{1 + G(s)H(s)\}^2} \cdot \frac{G(s)}{\dfrac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \qquad 4.4$$

olarak elde edilir. Genellikle pratik sistemlerde olduğu gibi G(s)H(s) kazancı pozitif bir değerdir ve bu kazanç değeri pozitif yönde arttıkça geribeslemeli sistemin duyarlılığı azalacaktır.

Örnek 4.1

Kapalı çevrim denetim sisteminde,

$$G(s)=\frac{s+a}{s^2+2s+5}\quad,\quad H(s)=1$$

olduğuna ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu T(s) olduğuna göre, S_a^G , S_G^T , S_a^T duyarlılıklarını belirleyiniz.

Çözüm

Sistemin ileri yol transfer fonksiyonunun a parametresine göre duyarlılığı,

$$S_a^G=\frac{\partial G}{\partial a}\frac{a}{G}=\frac{a}{s+a}$$

elde edilir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonunun açık çevrim transfer fonksiyonuna göre duyarlılığı denklem 4.4 den,

$$S_G^T=\frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s^2+2s+5}{s^2+3s+5+a}$$

Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

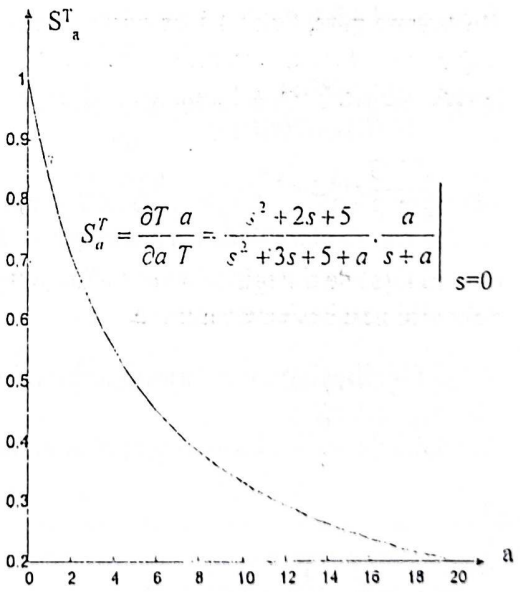
$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{s+a}{s^2+3s+5+a}$$

olduğuna göre

$$S_a^T=\frac{\partial T}{\partial a}\frac{a}{T}=\frac{s^2+2s+5}{s^2+3s+5+a}\cdot\frac{a}{s+a}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden,

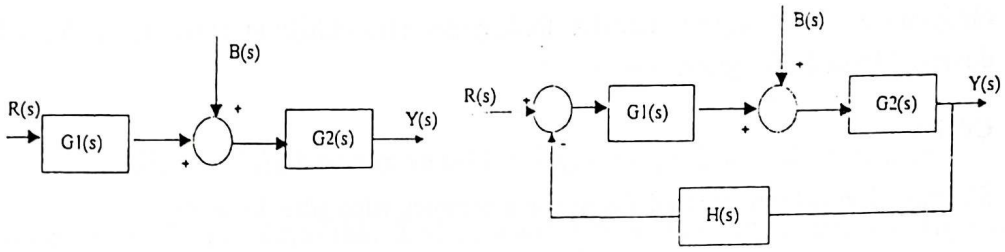
$$S_a^T=S_G^T.S_a^G$$



olduğu görülmektedir. S_a^T' nın s=0 için a değerine göre değişimi yani T(s) in a parametresine duyarlılığı şekildeki gibi olacaktır. Gerçekten de s=0 için T(s)=a/(5+a) olduğuna göre a değeri arttıkça T(s) in (burada s=0 olduğundan sistemin kalıcı durum kazancının), a değerinin değişiminden etkilenmesi azalacaktır ki şekildeki duyarlılık eğrisinin azalması bu durumu göstermektedir.

4.1.2 Geribeslemenin bozucu girişler üzerine etkisi

Bozucu girişler sisteme çeşitli noktalardan etki edebilir. Dolayısıyla bozucu girişin etki noktasına göre de sistem farklı şekillerde etkilenebilecektir. Ancak, genel anlamda geribesleme, bozucu girişlerin sistem çıkışı üzerindeki etkisini zayıflatır. Örnek olarak aşağıdaki gibi açık çevrim ve geribeslemeli sistemi dikkate alırsak,



Şekil 4.2 Bozucu girişli a-) açık çevrim b-) geribeslemeli sistem

Şekil 4.3.a da bozucu girişe göre sistemin çıkışı,

$$Y(s) = G2(s).B(s) \qquad 4.6$$

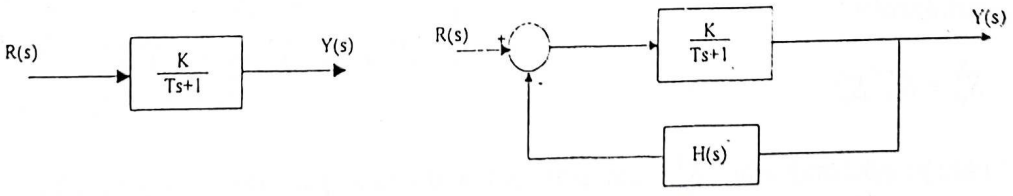
iken, Şekil 4.2.b de,

$$Y(s) = \frac{G2(s)}{1 + G1(s)G2(s)H(s)}.B(s) \qquad 4.7$$

olacaktır. Denklem 4.7 de, 1+G1.G2.H kazancı genellikle fiziksel sistemlerde olduğu gibi birden büyük olacağından sistemin çıkışı, bozucu girişten daha az etkilenecektir.

4.1.3 Geribeslemenin zaman sabitesi üzerine etkisi

Şekil 4.3 de verilen birinci dereceden bir sistemi ve geribeslemeli yapısını dikkate alalım.



Şekil 4.3 Birinci dereceden a-) açık çevrim b-) geribeslemeli sistem

Şekil 4.3.a da sistemin zaman sabitesi T dir. Şekil 4.3.b de, H(s)=as+b olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+bT}\frac{T}{\frac{T+aT}{1+bT}s+1}=\frac{1}{1+bT}\frac{T}{T_g s+1} \qquad 4.8$$

olduğundan a ve b değerlerine göre geribeslemeli sistemin zaman sabitesi Tg yorumlanırsa, b değeri pozitif yönde arttıkça zaman sabitesinin azaldığı görülür. a değerinin pozitif yöndeki artışı zaman sabitesini artırır ancak negatif yöndeki artışı, diğer bir ifade ile sistemdeki pozitif geribesleme, zaman sabitesini azaltacaktır.

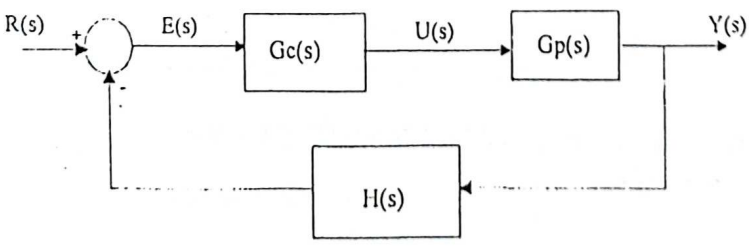
4.2 Kompanzasyon Yöntemleri

Kompanzasyon, genel anlamda bir sistemden beklenen denetim kriterlerini sağlayacak şekilde denetim sisteminin dinamiklerini değiştirmeyi yada geliştirmeyi ifade eder. Bir sistemden beklenen denetim kriterlerini sağlamanın en kolay yolu, sistemin kazancını ayarlamak olabilir. Ancak, çoğu zaman sadece kazancı değiştirmek sistemden beklenen davranışları elde etmeye yetmez ve ayrıca kazanç artışı, sistemi kararsızlığa da götürebilir. Bu nedenle, genellikle sistemden beklenen bütün kriterleri sağlayabilecek yapıda bir kompanzatör kullanılması ve sisteme uygun şekilde bağlanması gerekir. Bu bölümde, denetleyici yada kompanzatörlerin yapısal özelliklerinden önce bunların sisteme bağlanış şekillerine göre genel bir analizi verilecektir.

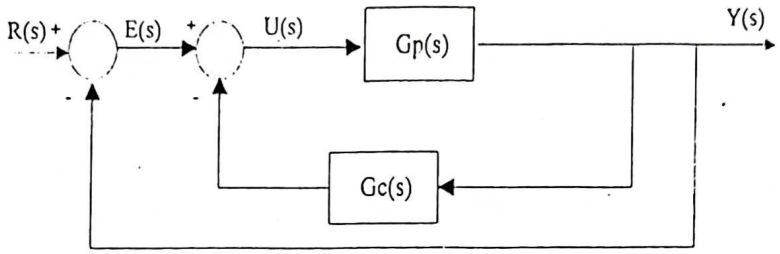
Geleneksel denetim sistemlerinde denetleyicilerin bağlanış şekillerine göre kompanzasyon yöntemleri genel olarak iki gruba ayrılır.

- Tek serbestlik dereceli denetim sistemi yada kompanzasyon yöntemi,
- İki serbestlik dereceli denetim sistemi yada kompanzasyon yöntemi

Tek serbestlik dereceli denetim sistemlerinde, sadece bir tane denetleyici bulunur ve bu denetleyici (birden çok parametresi olsa da) denetim kriterlerinin sağlayacak şekilde tasarlanmak durumundadır. Ancak, bu tür denetim sistemlerinde, bütün denetim kriterlerini iyi bir şekilde sağlayacak olan denetleyiciyi tasarlamak oldukça zor hatta imkansız olabilir. Örneğin, bir denetim sistemi, geçici rejim kriterlerini sağlayacak şekilde tasarlanabilir ancak bu denetim sisteminin parametre değişimlerine karşı duyarlılığı fazla olabilir. Yine bu tür denetim sistemlerinin, büyük bozucu girişlerde ve ölü bölge zamanı olan sistemlerde performansı iyi değildir. Şekil 4.4 de tek serbestlik dereceli ve en yaygın olarak kullanılan seri (kaskat) kompanzasyon yönteminin blok şeması verilmiştir.

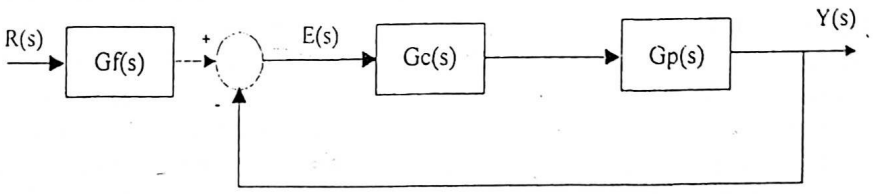


Şekil 4.4 Geribeslemeli seri (kaskat) kompanzasyon

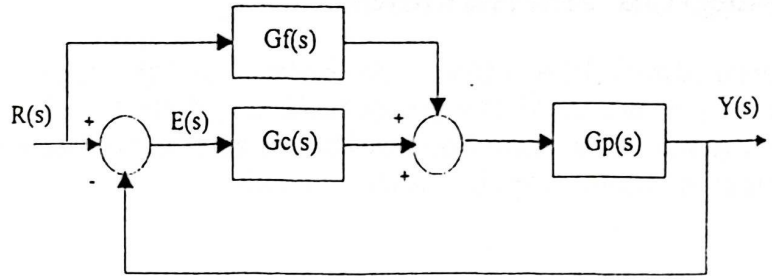


Şekil 4.5 Geri beslemeli kompanzasyon

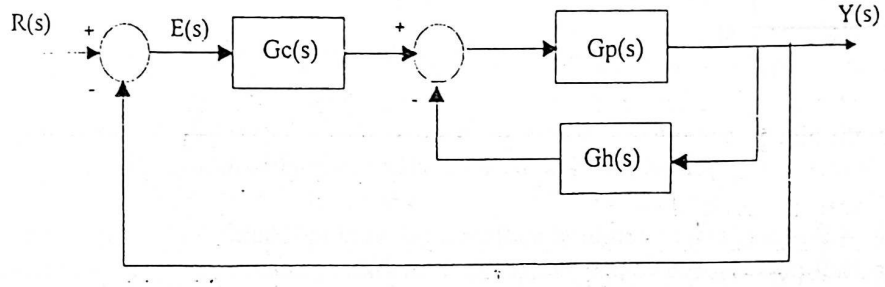
Tek serbestlik dereceli denetim sistemlerinin sakıncaları, İki serbestlik dereceli denetim sistemleri ile azaltılabilir. İki serbestlik dereceli denetim sistemlerinde iki adet denetleyici bulunur ve denetleyicilerden bir tanesi geri besleme yönünde etkin iken diğeri ileri besleme yönünde etkindir. Dolayısıyla bu tür sistemlerde, bütün denetim kriterlerini mümkün olduğu kadar karşılayacak bir denetim sistemi tasarlamak mümkündür. Örneğin, sistemin denetim kriterlerini karşılayan birinci denetleyiciden başka, bozucu girişlerin ölçülmesi ile ileri besleme yönünde sisteme bir düzeltme sinyali gönderen kapalı çevrim denetim sistemleri, iki serbestlik dereceli denetim sistemlerine örnek teşkil edebilir. Şekil 4.6-8 de İki serbestlik dereceli bazı denetim yapılarının blok şeması görülmektedir.



Şekil 4.6 İleri beslemeli kompanzasyon



Şekil 4.7 İleri beslemeli kompanzasyon



Şekil 4.8 Seri-geri beslemeli kompanzasyon

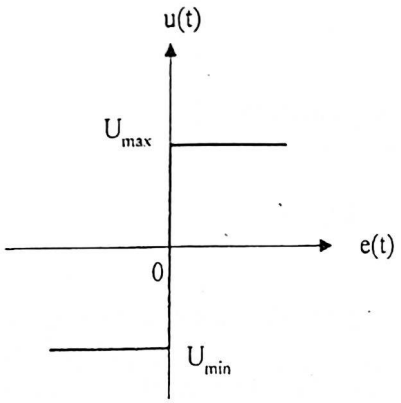
4.3 Temel Denetleyiciler

Şekil 4.4 de verilen geribeslemeli denetim yapısına göre denetleyici, referans giriş ile sistemin gerçek çıkışı arasındaki hatayı giderecek şekilde bir çıkış üreterek sisteme uygulamalıdır. Hata fonksiyonunun denetleyicide işleniş şekline göre denetleyicileri iki ana gruba ayırmak mümkündür.

- Aç-kapa çıkış üreten denetleyiciler
- Sürekli çıkış üreten denetleyiciler

4.3.1 Aç-Kapa Çıkış Üreten Denetleyiciler

İki konumlu denetleyiciler olarak da söylenen aç-kapa denetleyicilerde hata fonksiyonuna göre denetleyici çıkışı, ya en büyük çıkış değerinde yada en küçük çıkış değerinde olacaktır. İki konumlu denetleyicide, u(t) denetleyici çıkışı, e(t)- hata olmak üzere, giriş-çıkış bağıntısı ve grafiği aşağıda verilmiştir.



$$u(t) = \begin{cases} U\max & , \quad e(t) \geq 0 \ ise \\ U\min & , \quad e(t) < 0 \ ise \end{cases}$$

Şekil 4.9 İki konumlu denetleyicinin giriş-çıkış grafiği

Şekil 4.9 dan, iki konumlu denetleyicinin analog olarak bir karşılaştırıcı işlemsel yükseltici devresinden ibaret olduğu belirlenebilir. Şekil 4.... da işlemsel yükselticilerle kurulan çeşitli denetleyici devreleri toplu olarak verilmiştir.

4.3.2 Oransal (P) Denetleyiciler

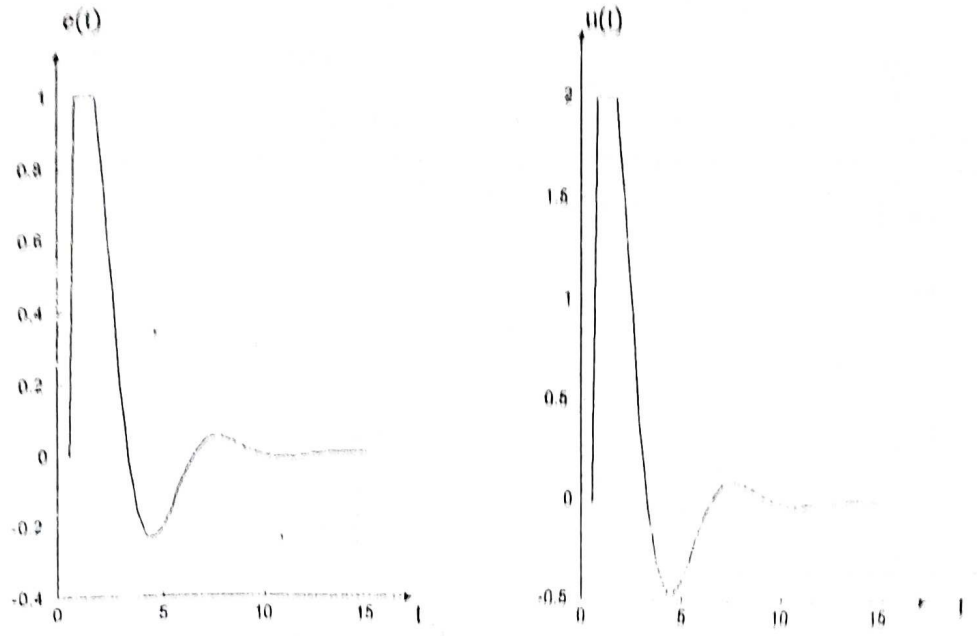
Oransal denetleyicilerde denetleyici çıkışı u(t) ile denetleyici girişi e(t) arasında sabit bir oransal ilişki vardır.

$$u(t) = Kp.e(t) \qquad 4.9$$

Denklem 4.9 dan oransal denetleyicinin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \qquad 4.10$$

Şekil 4.10 da, bir hata sinyaline Kp=2 olan bir oransal denetleyicinin ürettiği denetim sinyali verilmiştir. Sonuçta, denetim sinyali her zaman hata ile aynı sinyal şekline sahip olacak ancak Kp kadar yükseltilecektir.



Şekil 4. 10 P denetleyicinin giriş-çıkış grafiği. (Kp=2)

Oransal denetleyicilerde, herhangi bir andaki denetim çıkışı u(t), hatanın büyüklüğüne bağlıdır. Dolayısıyla hata ne kadar büyük olursa düzeltici denetim sinyali u(t) de o oranda büyük olur. Hata çok küçük olduğunda, denetim sinyali de çok küçük olacağından oransal denetleyicili tip 0 sistemlerde kalıcı durum hatası görülür. Oransal kazanç katsayısı Kp artırılarak sistemin cevap hızı artırılacağı gibi kalıcı durum hatası da azaltılabilir. Ancak, pratik olarak fiziksel sistemlerin girişleri sınırlı olacağından oransal kazancı belirli bir değerin üzerinde artırmanın yararı olmayacaktır. Denklem 4.9 dan oransal denetleyicinin analog olarak bir işlemsel yükselticili kazanç yükselteci olduğu belirlenebilir. Şekil 4..., da işlemsel yükselticilerle kurulan çeşitli denetleyici devreleri toplu olarak verilmiştir.

4.3.3 İntegral (I) Denetleyiciler

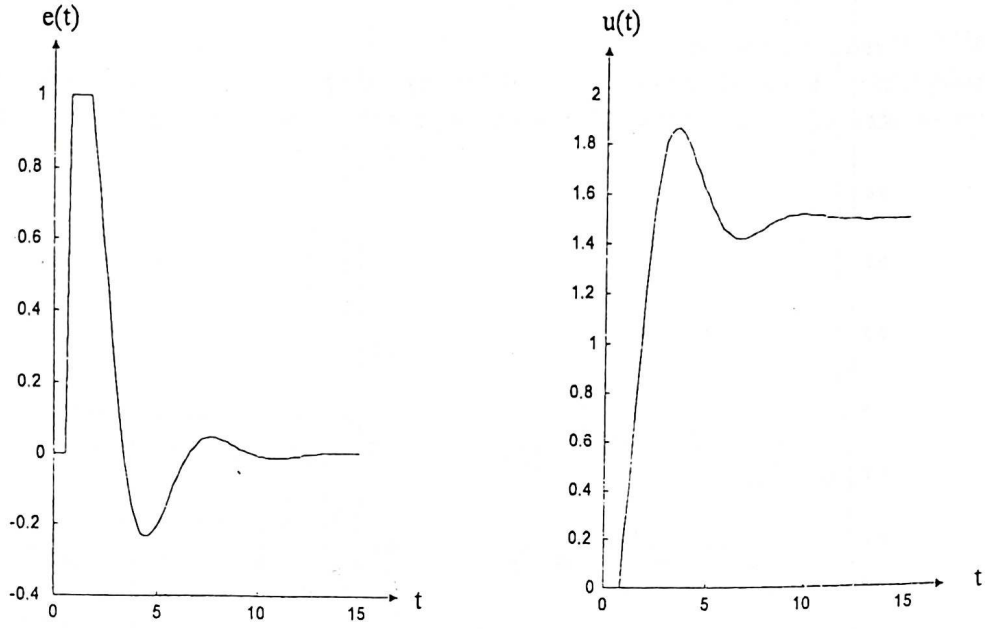
İntegral denetleyicilerde deneleyici çıkışı u(t), hatanın e(t) integrali ile belirlenmektedir.

$$u(t) = Ki\int_0^t e(t).dt = \frac{1}{Ti}\int_0^t e(t).dt \qquad 4.11$$

Burada, Ki- integral kazancı, Ti ise integral zaman sabiti olarak söylenir. Denklem 4.11 den integral denetleyicinin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{Ki}{s} = \frac{1}{sT_i} \qquad 4.12$$

İntegral denetleyicinin çıkışı, doğal olarak geçmişteki hataların birikimidir ve bu birikimin değeri integral kazancı Ki ile doğru, integral zaman sabiti Ti ile ters orantılıdır. Şekilde bir e(t) hatasına göre integral denetleyicinin çıkışı verilmiştir.



Şekil 4.11 I- denetleyicinin giriş-çıkış grafiği (Ki=1 yada Ti=1)

İntegral denetleyici, sürekli olarak hatanın integralini alarak bir çıkış ürettiğinden hata var olduğu sürece I-denetleyici çıkışı artacaktır ve sonuçta sistemde meydana gelebilecek kalıcı durum hatasını sıfır yapacaktır. İntegral denetleyiciler sistemin transfer fonksiyonuna orjinde bir kutup eklediğinden sistemin derecesini bir arttırır ve ayrıca sistemin tipini de bir artırır. Buna göre, integral denetleyicisi olmayan bir sistemin çeşitli giriş sinyallerine göre kalıcı durum hataları giderilmiş yada iyileştirilmiş olur. İntegral denetleyicilerin en önemli sakıncası ise sistemin transfer fonksiyonuna orjinde bir kutup eklediği için sistemin kararlılığını olumsuz yönde etkilemesi ve orjindeki kutbun aynı zamanda sisteme 90^0 lik faz gecikmesi getirmesi nedeniyle denetim sisteminin cevap hızını da düşürür.

4.3.4 Türev (D) Denetleyiciler

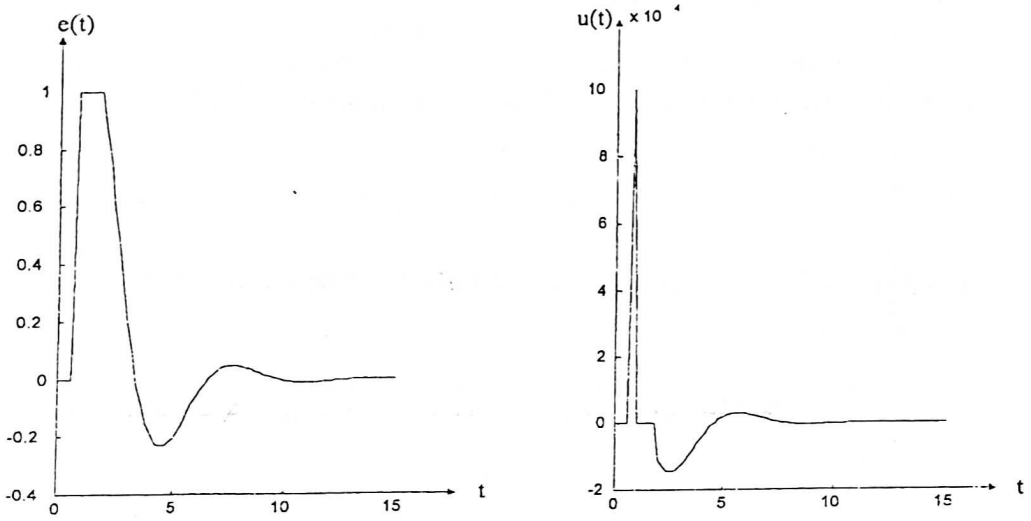
Türev denetleyicilerin çıkışı u(t), hata fonksiyonunun türevine, diğer bir ifade ile değişim hızına bağlıdır. Buna göre D-denetleyicinin çıkışı,

$$u(t) = K_d \frac{d}{dt} e(t) = T_d \frac{d}{dt} e(t) \qquad 4.13$$

olarak yazılabilir. Burada, Kd- türev kazancı ve Td- türev zaman sabiti olarak söylenir.Bu durumda D-denetleyicinin transfer fonksiyonu,

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = sK_d = s.T_d \qquad 4.14$$

olarak elde edilir. Türev denetim etkisi bazen zamanda orantı (rate-min) etkisi olarak da söylenir. Şekil 4.12 de, bir hata fonksiyonuna türev denetleyicinin verdiği tepki görülmektedir.



Şekil 4.12 D-denetleyicinin giriş-çıkış grafiği (Kd=1 yada Td=1)

Türev denetleyicinin en önemli üstünlüğü, hatanın değişimi başlar başlamaz büyük bir çıkış üreterek sisteme vermesi ve dolayısıyla büyük bir hata ortaya çıkmadan bir düzeltme etkisi sağlamasıdır. Dolayısıyla, sitemdeki aşmayı düzelten ve sistemin cevabını hızlandıran bir etkisi vardır. Şekil 4.12 de hatanın sıfırdan bire çıkışı sırasında D-denetleyicinin büyük bir çıkış ürettiği görülmektedir. Ayrıca, hata bulunmakla birlikte sabit kalıyorsa türev denetleyicinin çıkışı da sıfır olduğundan sabit kalıcı durum hatalarını düzeltme etkisi yoktur. Türev denetleyici, sistemin transfer fonksiyona orjinde bir sıfır eklediği için sisteme 90^0 lik faz önceliği getirir. Türev denetleyiciler, yalnızca hatanın değişimi sırasında etkili olduğundan denetim sistemlerinde tek başına kullanılmaz ve genellikle diğer denetleyicilerle birlikte kullanılabilir.

Türev denetleyiciler, gürültü sinyallerine karşı çok duyarlı olduğundan sistemin de gürültülü çalışmasına neden olacağından pratikte kullanımları sorunludur. Bu durumda denklem 4.14 de tanımlanan ideal türev denetleyici yerine aşağıdaki gibi alçak geçiren bir filtre ile birlikte kullanılır.

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s.K_d}{Ts+1} \qquad 4.15$$

Burada, filtrenin köşe frekansı olan T, bire göre oldukça küçük seçilen bir zaman sabitidir.

4.3.5 Oransal-İntegral (PI) Denetleyiciler

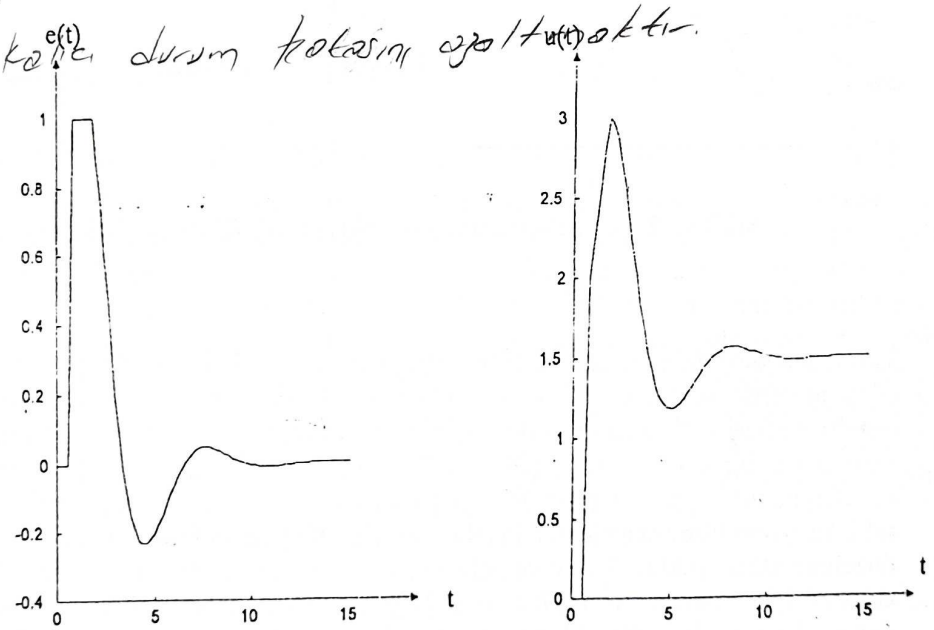
PI-denetleyiciler oransal ve integral denetleyicilerin birleştirilmesinden meydana gelir. Buna göre PI-denetleyici çıkışı u(t),

$$Gc(s) = Kp.e(t) + Ki\int_0^t e(t).dt = Kp.\{e(t) + \frac{1}{Ti}\int_0^t e(t).dt\} \qquad 4.16$$

olarak yazılabilir. Burada, Kp- oransal kazanç ve Ki- integral kazancı olmak üzere Ti=Kp/Ki integral zaman sabitidir. PI denetleyicinin transfer fonksiyonu;

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = Kp + \frac{Ki}{s} = Kp\ \{1 + \frac{1}{s.T_i}\} \qquad 4.17$$

olur. Şekil 4.13 de, bir hata sinyaline PI denetleyicinin tepkisi verilmiştir.



Şekil 4.13 PI denetleyicinin giriş-çıkış grafiği (Kp=2, Ki=1 yada Ti=2)

PI denetleyiciler, sistemdeki kalıcı durum hatasını yok etmekle yada girişe bağlı olarak azaltmakla birlikte sistemin cevap hızını düşürür.

4.3.6 Oransal-Türev (PD) Denetleyiciler

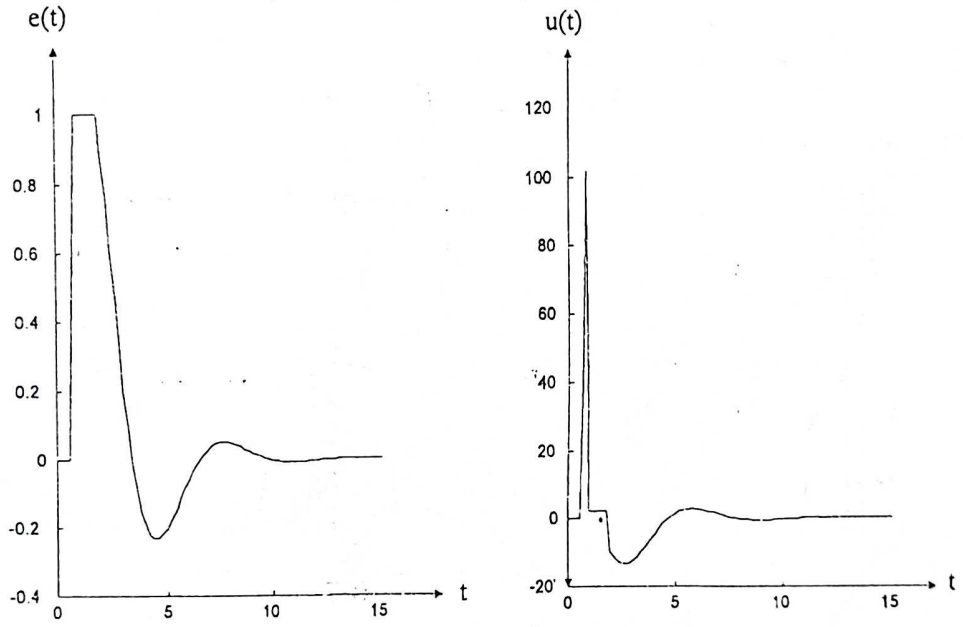
PD denetleyiciler, oransal ve türev denetleyicilerin birleşiminden meydana gelir ve denetim sinyali u(t), aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{d}{dt} e(t) = Kp\{e(t) + T_d \frac{d}{dt} e(t)\} \qquad 4.18$$

Burada, Kp-oransal kazanç ve Kd-türev kazancı olmak üzere Td = Kd/Kp türev zaman sabiti olarak söylenir. PD denetleyicinin transfer fonksiyonu,

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = Kp + K_D s = Kp\{1 + \frac{K_D}{K_p} s\} = Kp\{1 + T_D s\} \qquad 4.19$$

olarak elde edilir. Şekil 4.13 de, bir hata fonksiyonuna göre PD denetleyicinin çıkışı verilmiştir.



Şekil 4.13 PD denetleyicinin giriş-çıkış grafiği(Kp=2 K_D=0.0001 yada T_D= 0.00005)

PD denetleyiciler, oransal ve türev etkilerinin birleşimi olarak sistemin cevap hızını artırır. Buna karşılık var olan kalıcı durum hatası düzeltilemez.

4.3.7 Oransal-İntegral-Türev (PID) Denetleyiciler

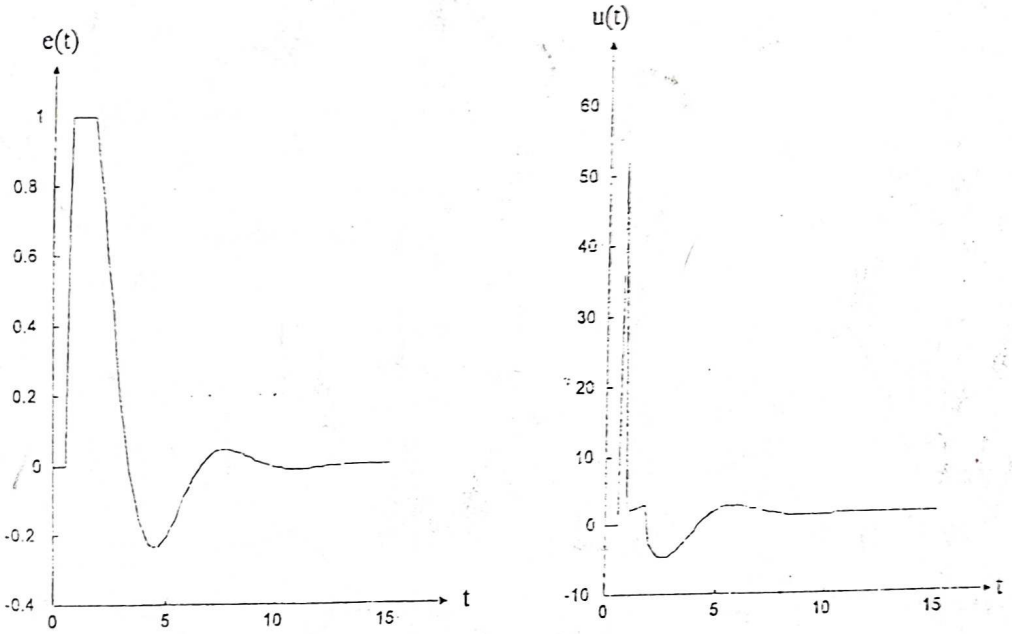
PID denetleyiciler üç temel denetleyicinin (P-I-D) birleşiminden meydana gelmiştir. Buna göre PID denetleyicinin çıkışı u(t),

$$u(t) = Kpe(t) + Ki\int_0^t e(t).dt + Kd\frac{d}{dt}e(t) = Kp\left\{e(t) + \frac{1}{Ti}\int_0^t e(t).dt + Td\frac{d}{dt}e(t)\right\} \qquad 4.20$$

olarak yazılabilir. PID denetleyicinin transfer fonksiyonu;

$$Gc(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = Kp + \frac{Ki}{s} + K_d s = Kp(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s) = \frac{kDs^2 + kps - ki}{s} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{s} \qquad 4.21$$

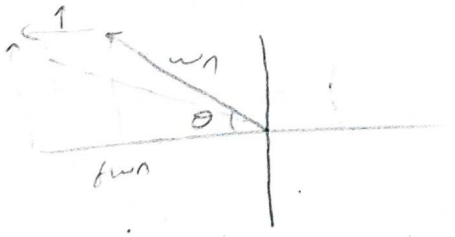
olur. Şekil 4.14 de bir hata sinyaline PID denetleyicinin tepkisi verilmiştir.



Şekil 4.14 PID denetleyicinin giriş-çıkış grafiği (Kp=2, Ki=1, K_D=0.00005)

PID denetleyiciler, üç temel denetleyicinin üstünlüklerini tek bir denetleyici içinde birleştirmektedir. Sonuç olarak, PID denetleyiciler, kazançları uygun ayarlanmak (yada tasarlanmak) koşulu ile sistemin cevap hızını artırırken kalıcı durum hatalarını yok edecek yada azaltacaktır.

Kutupları sola aldıkça sistemin geçici rejimi düzelir.



ile ωn arttıkça eğrinden tv azalır

$$t_v = \frac{0.8 + 2.5\delta}{\omega_n}$$

yine ωn arttıkça eğrinden ts azalır

$$t_s = \frac{4}{\delta\omega_n}$$