①

Silindirik koordinat sistemi:
ρ, ϕ ve z eksen değişkenleridir. $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \phi \le 2\pi$ ve $-\infty \le z \le \infty$ aralığında değişir. $\vec{a}_\rho, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ eksen yönündeki birim vektörlerdir. $P \equiv P(\rho,\phi,z)$ (nokta gösterimi)

$\vec{A} = A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z$ (vektör gösterimi)

$d\vec{\ell} = d\rho\, \vec{a}_\rho + \rho d\phi\, \vec{a}_\phi + dz\, \vec{a}_z$ (dif. uzunluk vektörü)

$d\vec{S}_z = \rho d\rho d\phi \vec{a}_z$, $d\vec{S}_\rho = \rho d\phi dz \vec{a}_\rho$, $d\vec{S}_\phi = d\rho dz \vec{a}_\phi$ (d.y.el.)

$dV = \rho d\rho d\phi dz$ (dif. hacim elemanı)

$\vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (vektör diverjansı)

$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$ (skaler alan gradyanı)

Kartezyen koordinat sistemi:
x, y ve z eksen değişkenleridir. $-\infty \le x \le \infty$, $-\infty \le y \le \infty$ ve $-\infty \le z \le \infty$ aralığında değişir. $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ eksen yönündeki birim vektörlerdir. $P \equiv P(x,y,z)$ (nokta gösterimi)

$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$ (vektör gösterimi)

$d\vec{\ell} = dx\, \vec{a}_x + dy\, \vec{a}_y + dz\, \vec{a}_z$ (dif. uzunluk vektörü)

$d\vec{S}_z = dxdy\vec{a}_z$, $d\vec{S}_y = dxdz\vec{a}_y$, $d\vec{S}_x = dydz\vec{a}_x$ (dif. yzy el.)

$dV = dxdydz$ (dif. hacim elemanı)

$\vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (vektör diverjansı)

$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$ (skaler alan gradyanı)

$\vec{R}_P = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$ P(x,y,z) noktasının konum vektörü

$\vec{R}_{PQ} = (x_q - x_p)\vec{a}_x + (y_q - y_p)\vec{a}_y + (z_q - z_p)\vec{a}_z$
(P noktasından Q noktasına yönlenmiş yer değiştirme vektörü)

$\varepsilon_o = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ F/m	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9.10^9$

Küresel koordinat sistemi:
r, θ ve ϕ eksen değişkenleridir. $0 \le r \le \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ ve $0 \le \phi \le 2\pi$ aralığında değişir. $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\phi$ eksen yönündeki birim vektörlerdir. $P \equiv P(r,\theta,\phi)$ (nokta gösterimi). $\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi$ (vektör gösterimi). $d\vec{\ell} = dr\, \vec{a}_r + rd\theta\, \vec{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\, \vec{a}_\phi$ (dif. uzunluk vektörü). $d\vec{S}_\phi = rdrd\theta\vec{a}_\phi$, $d\vec{S}_\theta = r\sin\theta drd\phi\vec{a}_\theta$; $d\vec{S}_r = r^2\sin\theta d\theta d\phi\vec{a}_r$ (d.y.el.). $dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ (dif. hacim elemanı)

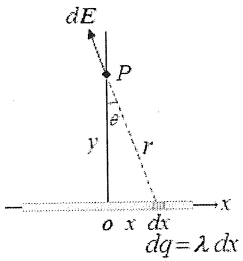
$\vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$ (diverjans). $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\vec{a}_\phi$ (gradyan)

②

Coulomb Kuvveti: Noktasal iki yükten birinin diğeri üzerinde meydana getirdiği kuvvet vektörü	$\vec{F} = k\frac{Q_1Q_2}{R^2}\vec{a}_R$ Newton
Toplamsallık İlkesi'ne göre, birden fazla sayıda noktasal yükün belli bir noktasal yük üzerinde meydana getirdiği toplam kuvvet vektörü	$\vec{F} = kQ\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i^2}\vec{a}_i$ Newton
Elektrik Alanı: Noktasal bir yükten dolayı bir noktadaki elektrik alan vektörü	$\vec{E} = k\frac{Q}{R^2}\vec{a}_R$ N/C
Toplamsallık İlkesi'ne göre, birden fazla sayıda noktasal yükün belli bir noktada meydana getirdiği toplam elektrik alan vektörü	$\vec{E} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i^2}\vec{a}_i$ N/C
Bir noktada elektrik alanı bilindiği takdirde, o noktaya konulacak noktasal bir yük üzerinde meydana gelecek kuvvet vektörü	$\vec{F} = Q\vec{E}$ Newton
Bir bölgede bulunan noktasal yüklerden dolayı, net yük miktarı	$Q_{net} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$ C
Çizgi bir yol üzerinde dağılmış olan yükten dolayı net yük miktarı	$Q_{net} = \int_L \rho_L dL$ C ve $\rho_L = \frac{dQ}{dL}$ C/m
Bir düzlem/yüzey üzerinde dağılmış olan yükten dolayı net yük miktarı	$Q_{net} = \int_s \rho_s dS$ C ve $\rho_s = \frac{dQ}{dS}$ C/m^2
Bir hacim bölgede dağılmış olan yükten dolayı net yük miktarı	$Q_{net} = \int_v \rho_v dV$ C ve $\rho_v = \frac{dQ}{dV}$ C/m^3
Çizgi bir yol üzerinde dağılmış olan yükten dolayı belli bir noktadaki elektrik alan vektörü	$\vec{E} = k\int_L \frac{\rho_L dL}{R^2}\vec{a}_R$ N/C
Bir düzlem/yüzey üzerinde dağılmış olan yükten dolayı belli bir noktadaki elektrik alan vektörü	$\vec{E} = k\int_s \frac{\rho_s dS}{R^2}\vec{a}_R$ N/C
Bir hacim bölgede dağılmış olan yükten dolayı belli bir noktadaki elektrik alan vektörü	$\vec{E} = k\int_v \frac{\rho_v dV}{R^2}\vec{a}_R$ N/C

Sonsuz uzunlukta çizgi yol üzerinde düzgün yük dağılımı nedeniyle belli bir noktadaki elektrik alan vektörü	$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho}\vec{a}_\rho \quad N/C$
Sonsuz bir düzlem üzerinde düzgün yük dağılımı nedeniyle belli bir noktadaki elektrik alan vektörü	$\vec{E} = \pm\frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\vec{a}_n \quad N/C$
Merkezi orijin noktasında ve x-y düzleminde bulunan $\rho \leq a$ yarıçaplı dairesel bir disk üzerinde ρ_s yoğunlukta düzgün yük dağılımı nedeniyle (0,0,h) noktasında meydana gelen elektrik alan vektörü	$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}})\vec{a}_z \quad N/C$
Elektrik akı yoğunluğu vektörü: Birim yüzeyden dik geçen elektrik akısı miktarı	$\vec{D} = \frac{d\Psi}{ds}\vec{a}_n \quad C/m^2$
Belli bir yüzeyi kesen elektrik akısı	$\Psi = \int_s \vec{D}\bullet\vec{a}_n\, dS \quad C$
Noktasal bir yük nedeniyle belli bir noktadaki elektrik akı yoğunluğu vektörü	$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{a}_R \quad C/m^2$
Toplamsallık İlkesi'ne göre, birden fazla sayıda noktasal yük nedeniyle belli bir noktada meydana gelen toplam akı yoğunluğu vektörü	$\vec{D} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i^2}\vec{a}_i \quad C/m^2$
Gauss Yasası: Kapalı bir yüzeyi kesen elektrik akısı, kapalı yüzeyin çevrelediği hacim bölgesinde bulunan net yük miktarına eşittir.	$\Psi = \oint_s \vec{D}\bullet\vec{a}_n dS = Q_{net} \quad C$
Akı yoğunluğu vektörü ile elektrik alan vektörü arasındaki ilişki	$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} \quad C/m^2$
Sırasıyla akı yoğunluğunun diverjansı ve potansiyelin gradyanı	$\vec{\nabla}\bullet\vec{D} = \rho_V \quad C/m^3 \;;\; \vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad N/C$
Diverjans Teoremi	$\oint_s \vec{D}\bullet\vec{a}_n dS = \int_v(\vec{\nabla}\bullet\vec{D})dV$
Elektrik alanı içerisinde bir B noktasından bir A noktasına noktasal bir Q yükünün taşınmasıyla beraber yapılan iş miktarı	$W = -Q\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{\ell} \quad Joule$
Elektrik alanı içerisinde bir A noktasının bir B noktasına göre potansiyeli	$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{\ell} \quad Volt \;;\; W = Q(-\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{\ell}) = QV_{AB}$
Elektrostatik alan korunumlu alandır. Korunumlu elektrik alanında bir B noktasında bir A noktasında taşınan bir noktasal Q yükü için yapılan iş izlenen yoldan bağımsızdır.	$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{\ell} = 0 \;;\; W = -Q\underbrace{\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{\ell}}_{I.yol} = -Q\underbrace{\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{\ell}}_{II.yol} \quad Joule$
Korunumlu elektrik alanı içerisinde	$V_{AB} = V_{AC} - V_{BC} = V_A - V_B \quad Volt$
Noktasal bir Q yükünden dolayı sırasıyla bir A noktasının bir B noktasına göre ve herhangi bir noktanın sonsuza göre potansiyeli	$V_{AB} = kQ(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}) \quad Volt \;;\; V = \frac{kQ}{R} \quad Volt$
Birden fazla sayıda noktasal yükten dolayı belli bir noktanın sonsuza göre potansiyeli	$V = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i} \quad Volt$
Çizgi yol üzerinde dağılmış bulunan yük nedeniyle belli bir noktanın sonsuza göre potansiyeli	$V = k\int_L \frac{dQ}{R} = k\int_L \frac{\rho_L dL}{R} \quad Volt$
Düzlem/yüzey bölgede dağılmış bulunan yük nedeniyle belli bir noktanın sonsuza göre potansiyeli	$V = k\int_s \frac{dQ}{R} = k\int_s \frac{\rho_s dS}{R} \quad Volt$
Hacim bölgesinde dağılmış bulunan yük nedeniyle belli bir noktanın sonsuza göre potansiyeli	$V = k\int_v \frac{dQ}{R} = k\int_v \frac{\rho_v d\upsilon}{R} \quad Volt$
Bir bölgede bulunan noktasal yüklerin toplam enerjisi	$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i \quad Joule$
Belli bir hacim bölgesinde dağılmış olan yük nedeniyle toplam enerji	$W_E = \frac{1}{2}\int_v(\vec{D}\bullet\vec{E})dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_v E^2 dV = \frac{1}{2\varepsilon_o}\int_v D^2 dV \quad Joule$

Örnek : Homojen yüklü sonsuz uzunluktaki bir çubuk şekildeki gibi x-ekseni üzerinde bulunmaktadır. Çubuk λ çizgisel yük yoğunluğuna sahip ise, çubuktan y kadar uzaktaki bir noktada elektrik alan ifadesini bulunuz.



$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$E = \int dE\cos\theta = k\lambda y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2/y^2\right)^{3/2}}$$

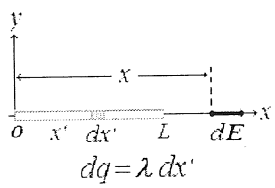
$$\left.\begin{array}{r}\tan\theta = x/y\\ \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta = dx/y\end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{k\lambda}{y}\int\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y}\int\cos\theta d\theta$$

$$E = \frac{k\lambda}{y}\sin\theta = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow E = \frac{2k\lambda}{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

bulunur.

(22-15)

Örnek : Uzunluğu L olan homojen yüklü bir çubuk şekildeki gibi x-ekseni üzerinde bulunmaktadır. Çubuk λ çizgisel yük yoğunluğuna sahip ise, orijinden x kadar uzaktaki ($x > L$) bir P noktasında elektrik alan ifadesini bulunuz.



$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{\lambda dx'}{\left(x-x'\right)^2}$$

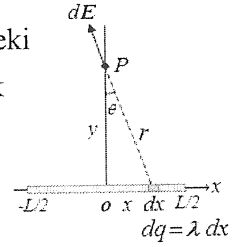
$$E = \int dE = k\lambda\int_0^L\frac{dx'}{\left(x-x'\right)^2} \quad ; \quad \left.\begin{array}{r}u = x-x'\\ du = -dx'\end{array}\right\} \rightarrow E = -k\lambda\frac{k\lambda}{y^2}\int\frac{du}{u^2}$$

$$E = k\lambda\frac{1}{u} = k\lambda\left[\frac{1}{x-x'}\right]_0^L = k\lambda\left[\frac{1}{x-L}-\frac{1}{x}\right]$$

$$E = \frac{k\lambda L}{x(x-L)}$$

bulunur.

Örnek : Uzunluğu L olan homojen yüklü bir çubuk şekildeki gibi x-ekseni üzerinde bulunmaktadır. Çubuk λ çizgisel yük yoğunluğuna sahip ise, çubuğun orta noktasından y kadar uzaktaki bir noktada elektrik alan ifadesini bulunuz.



$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$E = \int dE\cos\theta = k\lambda y\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y^2}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{\left(1+x^2/y^2\right)^{3/2}}$$

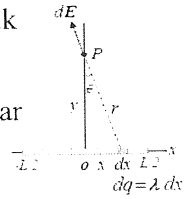
$$\left.\begin{array}{r}\tan\theta = x/y\\ \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta = dx/y\end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{k\lambda}{y}\int\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y}\int\cos\theta d\theta$$

$$E = \frac{k\lambda}{y}\sin\theta = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2} \rightarrow E = \frac{k\lambda L}{y\sqrt{\left(L/2\right)^2+y^2}}$$

bulunur.

(22-16)

Örnek : x-ekseni üzerinde bulunan, uzunluğu L olan bir çubuk $\lambda = Ax$ çizgisel yük yoğunluğuna sahiptir. (A pozitif bir, x ise çubuğun ortasından olan uzaklıktır. Çubuğun ortasından y kadar uzaktaki bir noktada elektrik alan ifadesi nedir?



$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)} = kA\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$E = \int dE\cos\theta = kAy\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = 2kAy\int_0^{L/2}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$u = x^2+y^2 \rightarrow du = 2xdx \rightarrow E = kAy\int\frac{du}{u^{3/2}} = kAy\frac{u^{-1/2}}{\left(-1/2\right)}$$

$$E = -2kAy\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^{L/2} = 2kA\left[1-\frac{y}{\sqrt{\left(L/2\right)^2+y^2}}\right]$$ bulunur.

1_ Elektromanyetik Model

Elektromanyetik, durağan veya hareket halindeki elektrik yüklerinin neden olduğu elektrik ve manyetik olayların çalışıldığı disiplindir. Elektrik yüklerinin varlığı 2500 yıldan daha öncesinde Yunanlı astronom Miletli Thales tarafından keşfedilmişti. Kehribarı (Yunanca = Elektron) ipek veya yüne sürtüp somon veya küçük kağıt parçalarını çektiğini gözlemlemiştir.

Temel fizikten (+) pozitif ve (−) negatif iki tip yükün olduğunu biliyoruz. + ve − yüklerin her ikisinde elektrik alanının kaynağıdır. Hareketli yükler bir akım oluşturur ve bu da bir manyetik alan oluşturur. Genel olarak bir alan, bir niceliğin uzay dağılımıdır ve zamana bağımlı olabilir veya olmaz. Zamanla değişen bir elektrik alana bir manyetik alan eşlik eder. Bunun tersinde geçerlidir. Zamanla değişen elektrik ve manyetik alanlar birbirine bağlıdır ve elektromanyetik alan oluştururlar.

Bilimsel bir konu Tümevarım veya Tümdengelim yöntemlerinden yaklaşımlarından biriyle geliştirilir. Tümevarımda deneylerden elde edilen gözlemlerle başlar ve yasalara ve teoremlere ulaşılır. Özelden genele ilkelere muhakeme ile erişilir. Tümdengelimde, idealleştirilmiş bir model için birkaç temel ~~postulat~~ bağıntı postülat olarak alınır. Postülat olarak bağıntılar özel yasa ve ~~bağıntı~~ teoremlerin çıkarıldığı aksiyomlardır. Modelin ve aksiyomların geçerliliği deneysel gözlemlerle aynı sonuçları tahmin etme düzeyi ile belirlenir

ideal modele dayanan bir teorinin geliştirilmesi aşamaları:

1. adım: Konuyla ilgili temel nicelikler tanımlanır.

2. adım: Bu niceliklerin işlem kuralları (matematiği) belirtilir.

3. adım: Bazı temel bağıntılar postülat olarak alınır.

Örnek, ideal kaynaklar ve saf direnç, endüktans ve kapasitans dan oluşan devre modeline dayanan devre teorisidir. (1) temel nicelikler gerilim (V), akım (I), direnç (R), endüktans (L), ve kapasitans (C) dir. (2). İşlem kuralları, cebir, adi diferansiyel denklemler, Laplace dönüşüm kuralları; (3) Temel postülatlar ise Kirchoff'un gerilim ve akım yasalarıdır.

Benzer şekilde, uygunca seçilmiş bir elektromanyetik model üzerine bir elektromanyetik teori kurulabilir. (1) adımda elektromanyetikteki temel nicelikleri tanımlayacağız. (2) adımda işlem kuralları vektör cebiri, vektör hesap ve kısmi diferansiyel denklemlerdir. (3) adım temel kabüllenmeler, sırasıyla, statik elektrik alanlar, statik manyetik alanlar ve elektromanyetik alanlar.

Modelimizde nicelikler kabaca iki'ye ayrılır: Kaynak nicelikler ve alan nicelikleri. Elektromanyetik alanların kaynağı durağan veya hareket halindeki elektrik yükleridir. Ancak bir elektromanyetik alan yüklerin yeniden dağıtılmasına neden olabilir ve buda sonuç olarak alanı değiştirir. Bundan dolayı neden ve sonuç arasındaki ayrım her zaman çok belirgin değildir.

Elektrik yükünü göstermek için q (Q) sembolü kullanılacaktır. Elektrik yükü maddenin temel bir özelliğidir. ve sadece bir elektron üzerindeki e yükünün ∓ katları halinde bulunur. e yükü

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ C \quad (C = \text{Coulomb})$$

Coulomb elektrik yükü çok büyük bir birimdir. 1C elde etmek için $1/1.6 \cdot 10^{-19}$ veya 6,25 milyon trilyon elektron gerekir. Aralarında 1m olan iki 1C'luk yük birbirine yaklaşık 1 milyon ton kuvvet uygular.

Elektrik yükünün korunumu ilkesi, enerjinin korunumu ilkesi gibi fiziğin temel bir postülatı veya yasasıdır. Elektrik yükünün korunduğunu, yani ne yaratılabildiğini ne de yok edilebildiğini belirtir. Bu doğanın bir yasasıdır. ve diğer ilkelerden veya bağıntılardan çıkartılamaz.

Elektrik yükleri bir yerden diğerine hareket edebilir veya bir elektromanyetik alanın etkisi altında yeniden dağılabilir. Ancak kapalı bir sistemdeki + ve − yüklerin cebirsel toplamı sabit kalır. Elektrik yükünün korunumu ilkesi her koşul altında ve her zaman sağlanmalıdır. Bir elektromanyetik problemin, elektrik yükünün korunumu ilkesi ile çelişen herhangi bir formülasyonu veya çözümü yanlış olmalıdır.

Mikroskobik anlamda bir noktada elektrik yükü ayrık olarak vardır veya yoktur. Atomik ölçülerdeki bu ani değişimler büyük sayıda yük toplamı incelendiğinde önemsizdir. Elektromanyetik için makroskopik veya büyük ölçekli bir teori oluştururken düzgünleştirilmiş ~~ortamlarda~~ ortalama yoğunluk fonksiyonlarının çok iyi sonuçlar verir. Hacim yük yoğunluğu ρ_v'yi bir kaynak niceliği olarak

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad \left(\frac{C}{m^3}\right)$$

olarak tanımlanır. Burada Δq çok küçük bir Δv hacmindeki yük miktarıdır. Δv, ρ_v'nin doğru değişimini temsil etmeye yetecek kadar küçük ancak çok büyük sayıda ayrık yük içerecek kadar da büyük olmalıdır. Örneğin kenarları 1 mikron (10^{-6} m veya 1 μm) kadar küçük bir temel küpün hacmi 10^{-18} m^3 tür. bu da hâlâ 10^{11} (100 milyar) atom içerir. Böyle küçük bir Δv ile tanımlanan, uzay koordinatlarının düzgünleştirilmiş ρ_v fonksiyonunun tüm pratik amaçlar açısından doğru makroskopik sonuçlar vermesi beklenir.

Bazı fiziksel durumlarda Δq yükü bir Δs yüzey elemanı veya bir Δl doğru elemanı üzerinde bulunur. Böyle durumlarda ρ_s yüzey yük yoğunluğunu ve ρ_l çizgi yük yoğunluğunu

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \left(\frac{C}{m^2}\right) \quad \text{ve} \quad \rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \left(\frac{C}{m}\right)$$

Belli bazı durumlar dışında yük yoğunlukları noktadan noktaya değişir; böylece ρ_v, ρ_s, ρ_l genel olarak uzay koordinatlarının nokta fonksiyonudur.

Akım yükün zamana göre değişimidir.

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (C/s \text{ veya } A) \text{ ile verilir.}$$

Burada I'nın kendisi de zamana bağımlı olabilir. Akım bir sonlu alanda (kesitte) (iletken tel) akmalıdır. Bu nedenle bir nokta fonksiyonu değildir. J akım yoğunluğu akımın akış yönüne dik birim alandan akan akım miktarını ölçen bir vektör nokta fonksiyonudur. J (A/m^2) akım akış yönünde bir vektördür.

Elektromanyetikte dört temel vektör alan niceliği vardır: Elektrik alan şiddeti E, elektrik akı yoğunluğu veya elektrik yer değiştirme D, manyetik akı yoğunluğu B, ve manyetik alan şiddeti H dır. Elektrik alan şiddeti E, boş uzayda elektrostatik (durağan elektrik yüklerinin etkileri) çalışmalarda gereken tek vektördür. birim test yükü üzerindeki elektrik kuvveti olarak tanımlanır. Elektrik yer değiştirme (deplasman) vektörü D, malzeme ortamlarında elektrik alan çalışmaları için faydalıdır.

Benzer şekilde manyetik akı yoğunluğu B, boş uzayda manyetostatik çalışmalarında (durgun elektrik akımının etkileri) gereken tek vektördür. Verilen bir hızla hareket eden bir yükle etkiyen manyetik kuvvet ile ilişkilidir. Manyetik alan şiddeti H, malzeme ortamlarında manyetik alan çalışmalarında yararlıdır.

Temel Elektromanyetik Alan niceliklesi

Elektrik	Elektrik alan şiddeti	E	V/m
	Elektrik akı yoğunluğu (Elektrik yerdeğiştirme)	D	C/m^2
Manyetik	Manyetik akı yoğunluğu	B	T (Tesla) $= Vs/m^2$
	Manyetik alan şiddeti	H	A/m

Zamanla değişim olmadığında elektrik alan nicelikleri E ve D ile manyetik alan nicelikleri B ve H iki ayrı vektör çiftini oluşturur. Ancak zaman bağımlı durumlarda elektrik ve manyetik alan nicelikleri bağlaşıktır. Yani zamanla değişen E ve D, B ve H oluşturur veya tersi de olabilir. Dört niceliğin herbiri nokta fonksiyonudur. E ile D ve B ile H arasındaki bağıntıları malzeme (ortam) özellikleri belirler. Bu bağıntılar ortamın yapısal bağıntıları olarak adlandırılır.

SI birimleri ve Evrensel sabitler

Uluslararası birimler sistemi (SI) dört temel birimden oluşan MKSA (uzunluk, kütle, zaman, Akım) sistemidir. Elektromanyetikteki tüm birimler metre (m), kilogram (kg), saniye (s) ve amper (A) cinsinden ifade edilir. Örneğin Coulomb $C = (As)$, Elektrik alanşiddeti birimi $(V/m) = (kg\,m/As^3)$ manyetik akı yoğunluğu birimi Tesla $(T) = (kg/As^2)$ dir.

Elektromanyetik modelde dört alan niceliğine ek olarak üç evrensel sabit vardır. Bunlar boş uzayın (vakum) özellikleri ile ilgilidir. Bunlar elektromanyetik dalganın (ışık dahil) boş uzaydaki hızı c, boş uzayın elektrik geçirgenliği ε_0 ve boş uzayın manyetik geçirgenliği μ_0 dır.

$$c \cong 3.10^8 \ m/s \quad \text{(boş uzayda)}$$

ε_0 boş uzayda elektrik akı yoğunluğu D ile elektrik alan şiddeti arasındaki oranı sabitidir.

$$D = \varepsilon_0 E$$

μ_0 ise boş uzayda manyetik akı yoğunluğu B ile manyetik alan şiddeti H arasındaki oranı sabitidir.

$$H = \frac{1}{\mu_0} B$$

MKSA sisteminde

$$\mu_0 = 4\pi . 10^{-7} \ (H/m) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \cong \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$$

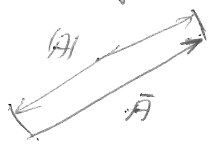
$$\cong 8{,}854\ 10^{-12} (F/m)$$

Vektör Analiz.

Birçok elektromanyetik nicelik vektör olduğundan, bunları kolaylıkla kullanmayı (toplama, çıkarma ve çarpma) bilmeliyiz. Belirli sonuçları üç boyutlu uzayda ifade etmek için uygun bir koordinat sistemi seçmeliyiz.

Vektörlerin toplanması ve çıkarılması

Bir vektörün büyüklüğü ve yönünün olduğunu biliyoruz. Bir vektörel büyüklük şekildeki gibi yönlendirilmiş doğru parçasıdır. yönü ok yönü ve uzunluğu ise değeridir.



"$\bar{A}$" veya **A** (koyu) ile gösterilir.

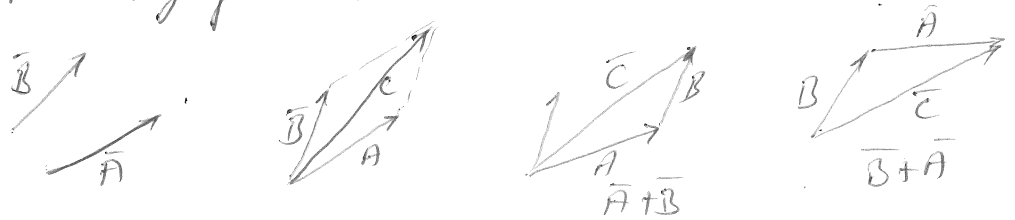
$|A|$ veya A (açık) vektörün büyüklüğünü gösterir.

İki vektör uzayda farklı yerlerde olsa da aynı büyüklük ve yöne sahipse birbirine eşittir. Aynı veya zıt yönde olmayan iki vektör bir düzlem belirler. Bunların toplamı aynı düzlemde yer alan bir $\bar{C}$ vektörüdür. $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$

grafik olarak;

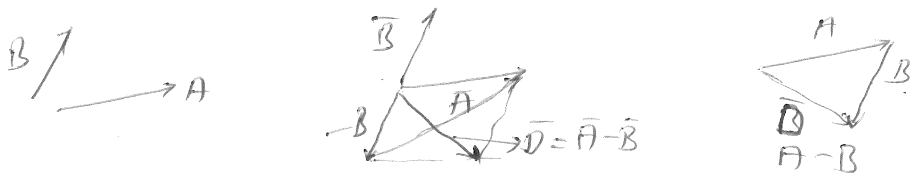
1- Paralel kenar: ~~Ayn~~ $\bar{C}$ vektörü $\bar{A}, \bar{B}$ vektörlerinin oluşturduğu paralel kenarın köşegeni dir.

2- Baş kuyruk kural: $\bar{A}$nın başı $\bar{B}$nin kuyruğuyla bağlanır. Toplamı $\bar{C}$ $\bar{A}$nın kuyruğundan $\bar{B}$nin başına çizilen vektördür. $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$ dır



$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$

Vektörlerin çıkarılması toplam cinsinden $\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$ olur.



Bir skaleri vektörle toplamak, çıkarmak v.b. anlamsızdır.

Vektörlerin çarpımı

Bir $\bar{A}$ vektörü pozitif bir k skaleri ile çarpılırsa, yönü değişmeksizin $\bar{A}$nın büyüklüğü k kat ~~artar~~ değişir.

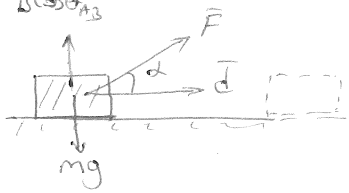
$$k\bar{A} = k|A|$$

Skaler veya Nokta çarpım

İki vektörün skaler çarpımı $\bar{A}\cdot\bar{B}$ ($\bar{A}$ nokta $\bar{B}$) ile gösterilir. İki vektörün nokta çarpımının sonucu skalerdir. Nokta çarpımı

$$\bar{A}\cdot\bar{B} \triangleq |A||B|\cos\theta_{AB}$$

θ_{AB} $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ arasındaki küçük açıdır. (180°'den küçük) ($\triangleq$ tanımdan dolayı eşit anlamına gelir)



$$W = \bar{F}\cdot\bar{d} = |\bar{F}||\bar{d}|\cos\alpha = F\,d\cos\alpha$$

Sonuç skaler olduğundan işleme skaler çarpma denir.

Tanımdan iki vektörün nokta çarpımı

1_ Büyüklüklerin çarpımına eşit veya küçüktür.

2_ Aralarındaki açı $\pi/2$ (90°) den büyük veya küçük olması + veya − olmasına neden olur.

3_ Bir vektörün büyüklüğü ile diğer vektörün ilk vektör üzerine izdüşümünün ($B\cos\theta$) çarpımına eşittir

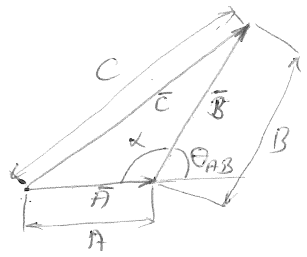
4_ Vektörler birbirine dik ise sonuç sıfırdır.

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\bar{A} \quad \text{yer değiştirme özelliği}$$

$\bar{A}=\bar{B}$ olursa $\bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{A}\cdot\bar{A} = \bar{A}^2 = |A|^2 (A.A\cos\alpha)$ veya $A = |A| = +\sqrt{\bar{A}\cdot\bar{A}}$

$+\sqrt{\bar{A}A}$ herhangi bir koordinat sisteminde vektörün büyüklüğünü bulmamıza sağlar.

Bir üçgende kosinüsler yasasını ispat etmek için vektörler kullanılır.



$$C = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\alpha}$$

kenarlar vektör kabul edilirse $\bar{C} = \bar{A}+\bar{B}$ alınarak ispat edilir

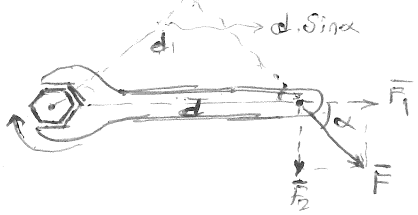
$$|\bar{C}|^2 = \bar{C}\cdot\bar{C} = (\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+\bar{B})$$
$$= \bar{A}\cdot\bar{A} + \bar{B}\cdot\bar{B} + 2\bar{A}\bar{B}$$
$$= |A|^2 + |B|^2 + 2|\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta_{AB}$$

θ_{AB} tanımdan dolayı $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ arasındaki küçük açı olup $(180-\alpha)$'ya eşit olduğundan $\cos\theta_{AB} = \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ olduğundan

$$C^2 = A^2+B^2 - 2AB\cos\alpha \text{ olur.}$$

2. Vektörel veya Çapraz Çarpım

$\bar{A}$ ve $\bar{B}$ nin vektörel çarpımı $\bar{A}\times\bar{B}$ ile gösterilir.



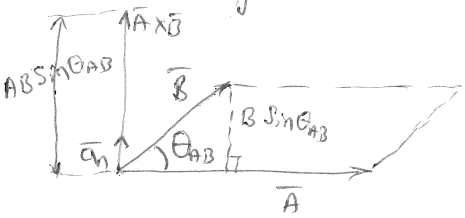
Not:
* Skaler çarpımda vektörlere yukarıdan bakılır.
* Vektörel çarpımda ise karşıdan bakılır ve nokta görünür.

Vidanın döndürülmesi (bükme momenti) $\vec{d}$ vektörü ve $\vec{F_2}$ vektörü ile ilgilidir.

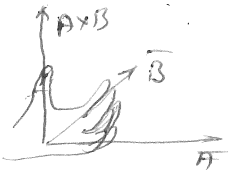
$\vec{M} = \vec{d}\times F \Rightarrow |\vec{M}| = F.d.\sin\alpha \quad (\vec{M} = \vec{F_2}\cdot\vec{d})$

$\bar{A}\times\bar{B} \triangleq |\bar{A}||\bar{B}|\sin\theta_{AB}\,\bar{a}_n$ ile tanımlanan başka bir vektördür.

Burada θ_{AB}, $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ vektörleri arasındaki küçük açı ($\leq\pi$) ve $\bar{a}_n$, $\bar{A}$ ve $\bar{B}$'yi içeren düzleme normal (dik) birim vektördür. a_n'in yönü, sağ elin parmakları θ_{AB} boyunca A'dan B'ye dönerken baş parmağın yönü ile aynıdır. (sağ el kuralı)



$A\times B = a_n AB\sin\theta_{AB}$



Sağ el kuralı

$\bar{A}\times\bar{B}$ vektör çarpımı, $\bar{a}_n$ yönü A'dan B'ye dönerken sağ el kuralı ile elde edilen ve büyüklüğü $\bar{A}$ ve $\bar{B}$'nin oluşturduğu paralel kenarın alanına eşit olan bir vektördür.

$B\times A = -A\times B$ sıra ters çevrilirse çarpımın işareti değişir.

1. Birim Vektör

Birim büyüklükte fiziksel olarak birimsiz vektörlerdir. Uzayda yön belirtecisi rolü üstlenirler.

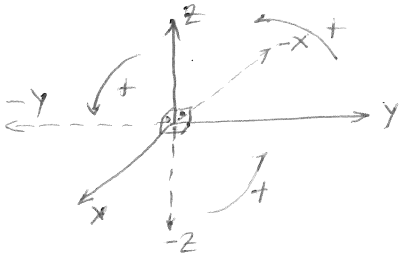
Bir $\bar{A}$ vektörü yönündeki birim vektör $\bar{a}_A$ ile gösterilir. indis harf yönü gösterir.

$\bar{a}_A = \dfrac{\bar{A}}{|\bar{A}|}$ olarak verilir. $\bar{A} = |\bar{A}|\,\bar{a}_A$ olur.

Kısaca, birim vektör bir vektörün bir yöndeki bileşenidir.

$\bar{A}\cdot\bar{a} = |\bar{A}|\cdot a\cos\varphi = |\bar{A}|\,1.\cos\varphi = |\bar{A}|\cos\varphi$ olur.

Vektörel çarpım yönleri



$\bar{X}\to\bar{Y}\to\bar{Z}\to\bar{X}$ ---- yönleri çarpımları pozitiftir.

$\bar{Z}\to\bar{Y}\to\bar{X}\to\bar{Z}$ --- yönleri çarpımları negatiftir.

$\bar{X}\times\bar{Y} = \bar{Z}$ $\quad$ $\bar{Y}\times\bar{X} = -\bar{Z}$

$\bar{Z}\times\bar{X} = \bar{Y}$ $\quad$ $\bar{X}\times\bar{Z} = -\bar{Y}$

$\bar{Y}\times\bar{Z} = \bar{X}$ $\quad$ $\bar{Z}\times\bar{Y} = -\bar{X}$ olur.

Üç Vektörün Çarpımı (karışık çarpma)

Üç vektörün iki tip çarpımı vardır (1) üçlü skaler çarpım (2) üçlü vektörel çarpımdır.

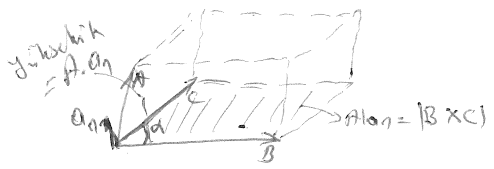
1. Üçlü skaler çarpım: $\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})$ dir.

$\bar{B}\times\bar{C}$, $\bar{B}$ ve $\bar{C}$'nin oluşturduğu paralel kenarın alanıdır.

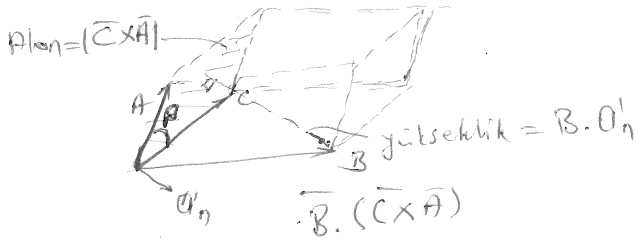
$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = (\bar{A}\,\bar{a}_n)\,B.C\sin\alpha$ olur.

$\bar{A}\bar{a}_n$ skalerdir ve paralel yüzlünün yüksekliğidir.

Bu skaler çarpım paralel yüzlünün hacmine eşit olur.



$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})$



$\bar{B}\cdot(\bar{C}\times\bar{A})$

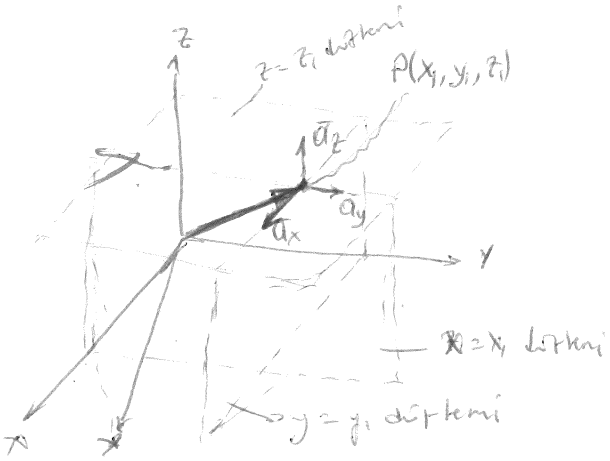
2. Üçlü vektör çarpım: $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})$

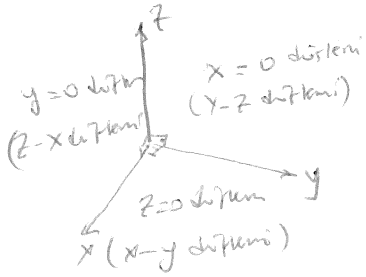
$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A) = C\cdot(A\times B)$ döngüsel permütasyon ~~dur.~~ ~~dolayı eşittir.~~

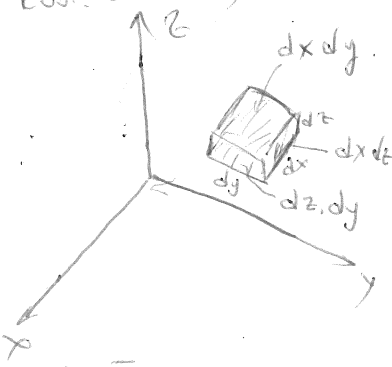
ORTOGONAL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Elektromanyetik yasalar koordinat sistemlerine göre değişmez. Ancak problemin pratik çözümü için, bu yasaların bağıntıları, problemin geometrisine uygun bir koordinat sisteminde ifade edilmesi gerekir.

1. KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ (Dikdörtgen, Dekart koor. sistemi)







$dl_x = dx\,\bar{a}_x$

$dl_y = dy\,\bar{a}_y$

$dl_z = dz\,\bar{a}_z$

$\bar{a}_x\times\bar{a}_y = \bar{a}_z$; $a_x\cdot a_y = a_y\cdot a_z = a_x\cdot a_z = 0$

$\bar{a}_y\times\bar{a}_z = \bar{a}_x$ ve

$\bar{a}_z\times\bar{a}_x = \bar{a}_y$ | $\bar{a}_x\cdot\bar{a}_x = \bar{a}_y\cdot\bar{a}_y = \bar{a}_z\cdot\bar{a}_z = 1$

P noktasının konum vektörü, O orjininden P noktasına çizilen vektördür.

$P(x_1, y_1, z_1)$

$\overrightarrow{OP} = x_1\bar{a}_x + y_1\bar{a}_y + z_1\bar{a}_z$

Örnekler.

Ö1 $\bar{A}.\bar{A} = \bar{A}^2 = A^2$ sonuç skaler olur.

$\bar{A} = 3\bar{x} + 6\bar{y} + 0\bar{z}$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$(3\bar{x} + 6\bar{y} + 0\bar{z})(3\bar{x} + 6\bar{y} + 0\bar{z}) = 3.3\,\bar{x}.\bar{x} + 3.6\,\cancel{\bar{x}.\bar{y}} + 6.3\,\cancel{\bar{y}.\bar{x}} + 6.6\,\bar{y}.\bar{y}$

$= 3.3 + 6.6 = 45$ Sonuç skaler olur

$A = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,7$

$A^2 = 6,7^2 = 45$

Ö2 $\bar{A} \times \bar{A} = 0$ sonuç vektörel olur.

$\bar{A} = 3\bar{x} + 6\bar{y} \Rightarrow (3\bar{x} + 6\bar{y}) \times (3\bar{x} + 6\bar{y}) = \bar{A} \times \bar{A} = 0$

$\bar{A} \times \bar{A} = 3.3\,\cancel{\bar{x}.\bar{x}} + 3.6\,\bar{x}.\bar{y} + 6.3\,\bar{y}\bar{x} + 6.6\,\cancel{\bar{y}\bar{y}}$ $\sin 0 = 0$ $\sin 0 = 0$

$= 0 + 18\bar{z} - 18\bar{z} + 0 = 0$ (sıfırdan bakış.

Ö3 $\bar{A}.\bar{B} = ?$

$\bar{A} = 3\bar{x} + 4\bar{y} - 2\bar{z}$

$\bar{B} = 2\bar{x} - 3\bar{y} + 5\bar{z}$

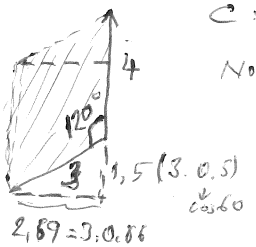
$6 - 12 - 10 = -16$

Ö4 $A = 5$

$\bar{B} = 3\bar{x} + 4\bar{y} - 5\bar{z}$ $\quad A.\bar{B} = ?$

$A.\bar{B} = 15\bar{x} + 20\bar{y} - 25\bar{z} = \bar{C}$ sonuç vektör olur.

Ö5 $\vec{A} = 3$, $\vec{B} = 4$ $\quad \bar{A} \times \bar{B} = \bar{C}$ ise $\bar{C} = ?$



$C = |\bar{A}||\bar{B}| \sin 120 = 3.4.0,866 = 10,39$

Not: dikkat edilirse iki vektörün vektör çarpımı bir alan verir.

$S = 2,59 . 4 = 10,39\ b^2$

Ö6 $\bar{A} = 5\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z}$

$\bar{B} = 3\bar{x} + 2\bar{y} + 3\bar{z}$

$\bar{C} = 0 + \bar{y} + 2\bar{z}$

$(A \times B).\bar{C} = ?$

$10\bar{z} - 15y - 9\bar{z} + 9\bar{x} + 3\bar{y} - 2\bar{x} = 7\bar{x} - 12\bar{y} + \bar{z}$

$(7\bar{x} - 12\bar{y} + \bar{z}).(\bar{y} + 2\bar{z}) = -12 + 2 = 10$ olur.

Ö1 Verilen iki vektörün oluşturacakları alan bulunur.

$|\bar{A}| = 3m$

$|\bar{B}| = 4m$

$\alpha = 120°$

$|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}||\bar{B}| \sin\alpha =$

$|\bar{A} \times \bar{B}| = 4.3.0,866 = 10,36\ b^2$

Ö2 Verilen iki vektörün çapraz çarpımını belirleyiniz.

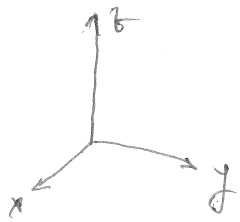
$\bar{A} = 3\bar{x} + 4\bar{y} + 2z$

$\bar{B} = 2\bar{x} - 3\bar{y} + 5\bar{z}$ $\quad \bar{A} \times \bar{B} = ?$

$A \times B = 3.(-3)\,\bar{x}\bar{y} + 3.5\,\bar{x}\bar{z} + 4.5\,\bar{y}\bar{z} + 4.2\,\bar{y}\bar{x} + 2(-3)\,\bar{z}\bar{y} + 2.2\,\bar{z}\bar{x}$

$\bar{A} \times \bar{B} = -9\bar{z} - 15\bar{y} + 20\bar{x} - 8\bar{z} + 6\bar{x} + 4\bar{y} = 26x - 11\bar{y} - 17\bar{z}$

Kartezyen Koordinatlar



$\bar{a}_x \times \bar{a}_y = \bar{a}_z$

$\bar{a}_y \times \bar{a}_z = \bar{a}_x$

$\bar{a}_z \times \bar{a}_x = \bar{a}_y$

$\overline{OP} = x_1\bar{a}_x + y_1\bar{a}_y + z_1\bar{a}_z$

$\bar{A} = A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z$

$dl = dx\,\bar{a}_x + dy\,\bar{a}_y + dz\,\bar{a}_z$

$dv = dx\,dy\,dz$

$\bar{a}_x \cdot a_y = \bar{a}_y \cdot \bar{a}_z = \bar{a}_x \cdot \bar{a}_z = 0$

$\bar{a}_x \cdot \bar{a}_x = \bar{a}_y \cdot \bar{a}_y = \bar{a}_z \cdot \bar{a}_z = 1$

$\bar{A}\cdot\bar{B} = (A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z)(B_x\bar{a}_x + B_y\bar{a}_y + B_z\bar{a}_z)$

$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\bar{A}\times\bar{B} = (A_x a_x + A_y\bar{a}_y + A_z a_z)\times(B_x\bar{a}_x + B_y\bar{a}_y + B_z\bar{a}_z)$

$= (A_yB_z - A_zB_y)\bar{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\bar{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\bar{a}_z$

$$A\times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \overset{X}{A_yB_z\bar{a}_x} + \overset{Z}{A_xB_y\bar{a}_z} + \overset{Y}{B_xA_z\bar{a}_y} - (\overset{Z}{B_xA_y a_z} + \overset{X}{A_zB_y\bar{a}_x} + \overset{Y}{A_xB_z\bar{a}_y})$$

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \end{matrix}$$

$= (A_yB_z - A_zB_y)\bar{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\bar{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\bar{a}_z$

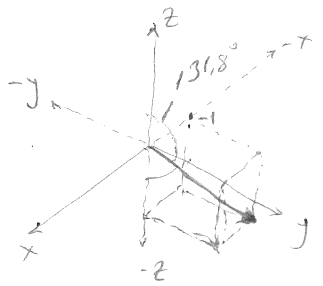
Ö) $A = -\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 2\bar{a}_z$ a) $|\bar{A}| = ?$ b) $\bar{a}_A = ?$ c) A ile z ekseni arasındaki açı = ?

a) $A.A = (-\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 2\bar{a}_z)(-\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 2\bar{a}_z) = (-1)(-1) + 2.2 + (-2)(-2) = 1+4+4 = 9$

$A = +\sqrt{\bar{A}.\bar{A}} = +\sqrt{9} = 3$

b) $a_A = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \frac{1}{3}(-\bar{a}_x + \bar{a}_y 2 - 2\bar{a}_z) = \frac{1}{3}\bar{a}_x + \frac{2}{3}\bar{a}_y - \frac{2}{3}\bar{a}_z$

c) $\bar{A}.\bar{a}_z = A.1.\cos\theta_z \Rightarrow (-\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 2a_z)\bar{a}_z = -2 = 3\cos\theta_z \Rightarrow \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$



$\theta_z = \underbrace{\cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)}_{131.8^\circ} = 180^\circ - \underset{\cos^{-1}\frac{2}{3}}{48,2^\circ} = 131.8^\circ$

Ö) $A = 5\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + \bar{a}_z$ ve $B = -3\bar{a}_x + 4\bar{a}_z$ a) $A.B = ?$ b) $A\times B = ?$ c) θ_{AB}

a) $A.B = (5)(-3) + (-2)(0) + (1)(4) = -11$

b) $A\times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\bar{a}_x - 23\bar{a}_y - 6\bar{a}_z$

c) $|\bar{A}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

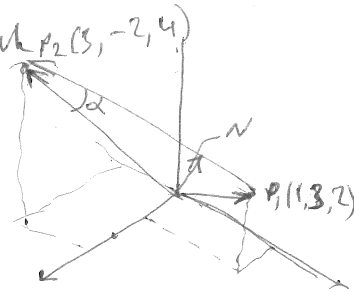
$|\bar{B}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\cos\theta_{AB} = \frac{A.B}{AB} = \frac{-11}{5\sqrt{30}} = -0,402$

$\theta_{AB} = \cos^{-1}(-0,402) = 180 - 66.3 = 113,7^\circ$

Ö a) $P_1(1,3,2)$ ve $P_2(3,-2,4)$ vektörleri kartezyen koordi gösterir

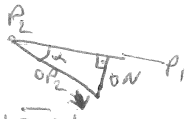
b) $\overline{P_1P_2}$ uzunluğu nedir c) Orijinden bu doğruya dik uzaklık



a) $\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1}$

$= (3\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + 4\bar{a}_z) - (\bar{a}_x + 3\bar{a}_y + 2\bar{a}_z) = 2\bar{a}_x - 5\bar{a}_y + 2\bar{a}_z$

b) $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{33}$



c) orijinden dik uzaklık (en kısa) $|\overline{ON}|$ dir. ve $\underbrace{|\overline{OP_2}|\sin\alpha}_{|\overline{ON}|} = |\overline{OP_2} \times \bar{a}_{P_1P_2}|$ eşittir.

$$|\overline{ON}| = \frac{|\overline{OP_2} \times \overline{P_1P_2}|}{|\overline{P_1P_2}|} = \frac{|\overline{OP_2}| \cdot |\overline{P_1P_2}| \cdot \sin\alpha}{|\overline{P_1P_2}|} =$$

$$= \frac{|(3\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + 4\bar{a}_z) \times (2\bar{a}_x - 5\bar{a}_y + 2\bar{a}_z)|}{\sqrt{33}} = \frac{|16\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 11\bar{a}_z|}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{381}}{\sqrt{33}} = 3{,}40.$$

Kartezyen koordinatlarda A_x, A_y ve A_z bileşenleri olan bir A vektörü

$$\bar{A} = A_x \bar{a}_x + A_y \bar{a}_y + A_z \bar{a}_z$$ olarak yazılabilir.

Bir vektör,

diferansiyel uzunluk $d\ell = dx\bar{a}_x + dy\bar{a}_y + dz\bar{a}_z$

diferansiyel hacim $dv = dx\,dy\,dz$

$\bar{A} = A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z$ ve $\bar{B} = B_x\bar{a}_x + B_y\bar{a}_y + B_z\bar{a}_z$

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = (A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z)\cdot(B_x\bar{a}_x + B_y\bar{a}_y + B_z\bar{a}_z) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$ olur.

$$\bar{A}\times\bar{B} = (A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z)\times(B_x\bar{a}_x + B_y\bar{a}_y + B_z\bar{a}_z)$$

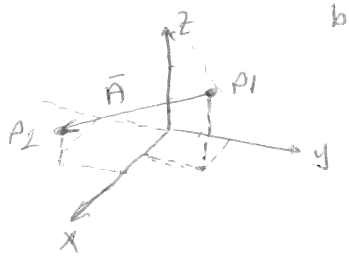
$$= (A_yB_z - A_zB_y)a_x + (A_zB_x - A_xB_z)\bar{a}_y + (A_xB_y - A_yA_x)a_z$$ olur.

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Örnek: $P1(1,2,3)$, $P2(2,-2,1)$ iki noktayı

a) Kartezyan koordinat sisteminde gösteriniz.

b) iki nokta arasına çizilecek vektörü tanımlayınız.



iki noktaya çizilecek vektör

$\vec{A}_{12} = P_2 - P_1$ şeklinde düşünülür.

$P_2\,(2\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + 1\bar{a}_z)$

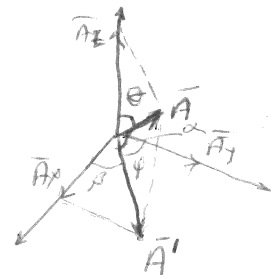
$P_1\,(\mp 1\bar{a}_x \mp 2\bar{a}_y \mp 3\bar{a}_z)$ (−1'le çarpılır sal)

$$\bar{A}_{21} = \bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 2\bar{a}_z$$

c) Şiddetini bulunuz $|A_{21}| = \sqrt{a_x^2 - 4\bar{a}_y^2 - 2a_z^2} = \sqrt{1^2 - 4^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

d) Birim vektörü bulunuz $\bar{a}_{12} = \dfrac{\bar{A}_{12}}{|\bar{A}_{12}|} = \dfrac{\bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 2\bar{a}_z}{\sqrt{21}} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\bar{a}_x - \dfrac{4}{\sqrt{21}}\bar{a}_y - \dfrac{2}{\sqrt{21}}\bar{a}_z$

Çalışma $|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ eşitliğini ispatlayınız.



$\bar{A}_x = A'\cdot\cos\beta$

$\bar{A}_y = \bar{A}'\cdot\cos\varphi$

$\bar{A}_z = A'\cdot\cos\theta$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A'^2\cos^2\beta + A'^2\cos^2\varphi + A'^2\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{A'^2\underbrace{(\cos^2\beta + \cos^2\varphi)}_{1} + A'^2\cos^2\theta}$$ $\beta + \varphi = 90 \Rightarrow \cos^2\beta + \cos^2\varphi = 1$

$$= \sqrt{A'^2(1) + A'^2\cos^2\theta}$$

$|A'| = \bar{A}\cos\alpha \Rightarrow |\bar{A}| = \sqrt{A^2\cos^2\alpha + A^2\cos^2\theta} = \sqrt{A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\theta)}$

$\alpha + \theta = 90 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow |\bar{A}| = \sqrt{A^2} \Rightarrow |\bar{A}| = \sqrt{\bar{A}^2} \Rightarrow A = A$ bulunur.

Örnek 3

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A} = 3\bar{x} + 4y - 2\bar{z} \\ \bar{B} = 2\bar{x} - 3\bar{y} + 5\bar{z}\end{array}\right\} \bar{A}\cdot\bar{B} = ?$$

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = (3\cdot 2)\,\bar{x}\cdot\bar{x} + (4\cdot -3)\,\bar{y}\cdot\bar{y} + (-2\cdot 5)\cdot\bar{z}\cdot\bar{z}$$
$$= 6 - 12 - 10 = -16 \quad \text{(sonuç skaler)}$$

$\bar{x}\cdot\bar{x} = 1$ $(\bar{x}\cdot\bar{x}\cdot\cos 0)$
$\bar{x}\cdot\bar{y} = 0$ $(\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\cos 90)$
$\bar{y}\cdot\bar{y} = 1$
$\bar{z}\cdot\bar{z} = 1$

Örnek 4

$$\left.\begin{array}{l}A = 5 \\ \bar{B} = 3\bar{x} + 4y - 2z\end{array}\right\} A\cdot\bar{B} = ?$$

$$15\bar{x} + 20\bar{y} - 25z \quad \text{(Sonuç vektördür)}$$

Örnek 5

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A} = 1\bar{a}_x + 1\bar{a}_y \quad 0 \\ \bar{B} = \bar{a}_x \quad 0\bar{a}_y + 2\bar{a}_z \\ \bar{C} = 0 + 2\bar{a}_y + 1\bar{a}_z\end{array}\right\} \bar{A}\times\bar{B}\times\bar{C} = ?$$

Çözüm: $\bar{A}\times\bar{B}$ bulunur. Bulunan vektör $\bar{C}$ ile vektörel çarpılır.

$$\bar{A}\times\bar{B} = (1\bar{a}_x + 1\bar{a}_y)\times(1\bar{a}_x + 2\bar{a}_z) = 1.1\,\bar{a}_x\bar{a}_x + 1.2\,\bar{a}_x\bar{a}_z + 1.1\,\bar{a}_y\bar{a}_x + 1.2\,\bar{a}_y\bar{a}_z$$
$$= -2\bar{a}_y - 1\bar{a}_z + 2\bar{a}_x$$
$$\bar{A}\times\bar{B} = 2\bar{a}_x - 2\bar{a}_y - \bar{a}_z$$

veya

$$\bar{A}\times\bar{B} = \left|\begin{array}{ccc}\bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{array}\right| \begin{array}{cc}\bar{a}_x & \bar{a}_y \\ 1 & 1 \\ 1 & 0\end{array}\Bigg| = 2\bar{a}_x - (\bar{a}_z + 2\bar{a}_y)$$
$$= 2\bar{a}_x - 2\bar{a}_y - \bar{a}_z$$

$$(\bar{A}\times\bar{B})\times(\bar{C}) = \left|\begin{array}{ccc}\bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1\end{array}\right| \begin{array}{cc}\bar{a}_x & \bar{a}_y \\ 2 & -2 \\ 0 & 2\end{array}\Bigg| = -2\bar{a}_x + 4\bar{a}_z - (-2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y)$$
$$= -2\bar{a}_y + 4\bar{a}_z$$

Çalışmalar:

① $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) = 2\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + 3\bar{a}_z$ olduğunu ispatlayınız.

Karışık Çarpma

Örnek 6

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A} = \bar{a}_x + \bar{a}_y \\ \bar{B} = \bar{a}_x + 2\bar{a}_z \\ \bar{C} = 2\bar{a}_y + \bar{a}_z\end{array}\right\} \bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})$$

Bu çarpma bir paralel hacim verir.

$$\bar{B}\times\bar{C} = \left|\begin{array}{ccc}\bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1\end{array}\right| \begin{array}{cc}\bar{a}_x & \bar{a}_y \\ 1 & 0 \\ 0 & 2\end{array}\Bigg| = 2\bar{a}_z - (4\bar{a}_x + \bar{a}_y)$$
$$= -4\bar{a}_x - \bar{a}_y + 2\bar{a}_z$$

$$\bar{B}\times\bar{C} = -4\bar{a}_x - \bar{a}_y + 2\bar{a}_z$$
$$\bar{A} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$
$$-4 - 1 = -5\ b^3$$

veya

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = \left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1\end{array}\right| \begin{array}{cc}1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2\end{array}\Bigg| = -(4+1) = \underline{\underline{-5}}\ b^3$$

Çarpımlar

$\bar{A} = 2\bar{a}_x + 4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z$
$\bar{B} = \bar{a}_x - \bar{a}_y$ olarak iki vektör veriliyor.

(2) $\bar{A} \cdot \bar{B} = ?$ Cevap: -2

(3) $\bar{A} \times \bar{B} = ?$ Cevap: $-3\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 6\bar{a}_z$

Örnek 2: $P_1(2,-4,1)$ den $P_2(0,-2,0)$'a doğru bir vektör çiziliyor

a) Vektörü tanımlayınız.

$$\bar{A}_{12} = P_2 - P_1 \Rightarrow A_{12} = ((0)-(2))\bar{a}_x + ((-2)-(-4))\bar{a}_y + (0-(1))\bar{a}_z$$
$$\bar{A}_{12} = -2\bar{a}_x + 2a_y - \bar{a}_z$$

b) Mutlak değeri (şiddeti) bulunuz.

$$|\bar{A}| = \sqrt{-2^2 + 2^2 - 1^2} = \sqrt{9}$$

c) Birim vektörü tanımlayınız.

$$\bar{a}_{A_{12}} = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \frac{-2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 1\bar{a}_z}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{\sqrt{9}}\bar{a}_x + \frac{2}{\sqrt{9}}\bar{a}_y - \frac{1}{\sqrt{9}}\bar{a}_z$$

Örnek 3: $\bar{A} = 2\bar{a}_x + 4\bar{a}_y$, $\bar{B} = 6\bar{a}_y - 4\bar{a}_z$ olarak iki vektör veriliyor. Bu iki vektörün (ortak düzlemlerindeki) aralarındaki açıyı bulunuz.

$$\bar{A}\times\bar{B} = |\bar{A}|\cdot|\bar{B}|\cdot \sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{|\bar{A}\times\bar{B}|}{|\bar{A}|\cdot|\bar{B}|} \text{ olur.}$$

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y \\ 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{matrix} = -16\bar{a}_x + 12\bar{a}_z + 8\bar{a}_y$$
$$= -16\bar{a}_x + 8\bar{a}_y + 12\bar{a}_z$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{2^2+4^2} = 4{,}47$$
$$|\bar{B}| = \sqrt{6^2-4^2} = 7{,}21$$
$$|\bar{A}\times\bar{B}| = \sqrt{-16^2+8^2+12^2} = \underline{21{,}54}$$

$$\sin\alpha = \frac{21{,}54}{4{,}47\cdot 7{,}21} = 0{,}66$$

$\hat{\alpha} = \underline{\underline{41{,}9^\circ}}$ bulunur.

veya

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}|\cdot|\bar{B}|\cdot\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{|\bar{A}\cdot\bar{B}|}{|\bar{A}|\cdot|\bar{B}|}$$

$\bar{A} = 2\bar{a}_x + 4\bar{a}_y \quad 0$
$\bar{B} = 0 \quad + 6\bar{a}_y - 4\bar{a}_z$

$\bar{A}\cdot\bar{B} = 24$

$\bar{A} = 4{,}47$
$\bar{B} = 7{,}21$

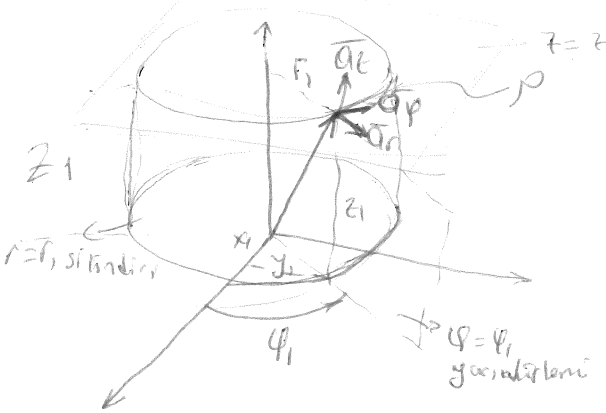
$$\cos\alpha = \frac{24}{4{,}47\cdot 7{,}21} = 0{,}744$$

$\hat{\alpha} = 41{,}9^\circ$ bulunur.

SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ

Bu sistem, analitik geometride kutupsal koordinatların üç boyuta çevrilmiş halidir.

Üç eksen tanımlama yerine r (yarıçap), φ (x ekseni ile yapılan açı) ve z (yüksekliği) olarak tanımlanır. $P(r_1, \varphi_1, z_1)$ noktası $r=r_1$ silindirik yüzeyinin, kenarı z ekseni olan ve xz düzlemi ile $\varphi=\varphi_1$ açısı yapan yarı düzlemin ve $z=z_1$'de xy düzlemine paralel bir düzlemin kesişimidir. r yarıçap (z ekseninden radyal uzaklık), φ açısı pozitifi x ekseninden ötürü $\bar{a}_\varphi$ silindirik yüzeye teğettir.



$\bar{a}_r \times \bar{a}_\varphi = \bar{a}_z$

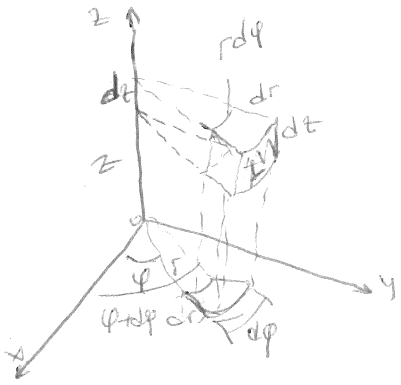
$\bar{a}_\varphi \times \bar{a}_z = \bar{a}_r$

$a_z \times \bar{a}_r = \bar{a}_\varphi$

r ve z uzunluktur. φ bir açıdır. Açı değişiminde uzunluğa çevrilen r (metrik katsayı) perektir.

$r\,d\varphi$ = yay uzunluğu

$\Rightarrow x = \alpha . r$ radyan



Silindirik koordinatlarda bir vektör diferansiyel uzunluğun genel ifadesi, üç koordinat yönündeki diferansiyel uzunluk değişimlerinin vektör toplamıdır.

$$dl = dr\,\bar{a}_r + r\,d\varphi\,\bar{a}_\varphi + dz\,\bar{a}_z$$

diferansiyel hacim $dU = r\,dr\,d\varphi\,dz$

dif. uzunluk değişimlerinin çarpımı

alan $\underset{(S)}{A} = \int_a^b dS$

hacim $V = \int_a^b dV$

$$S = \int_{z_a}^{z_b}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r\,d\varphi\,dz \qquad V = \int_{r_a}^{r_b}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\int_{z_a}^{z_b} r\,d\varphi\,dr\,dz$$

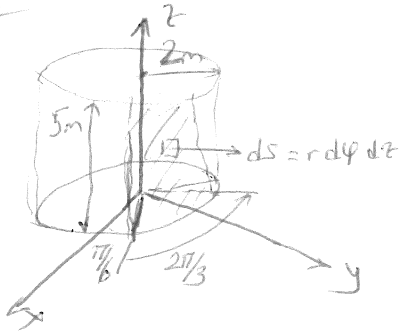
Silindirik koordinatlarda bir vektör $\bar{A} = A_r\bar{a}_r + A_\varphi\bar{a}_\varphi + A_z\bar{a}_z$ olur.

Ör: 1m çaplı bir dairenin 1/4 yayının uzunluğunu bulunuz.

I. yol $2\pi r = 2\pi . 0.5 = 3.14$ m tam çevre $\pi d^2 = \pi 1^2 = 3.14$ çevre $3.14/4 = 0.789 = \frac{1}{4}$ çevre

II. yol $r.\alpha = 0.5\,(90/57) = 0.789$ m

Ş2 Silindirik koordinat sisteminde şekildeki taralı yüzeyin alanını bulunuz.



$h = 5$m, $r = 2$m $30° \le \varphi \le 120°$

$ds = r\,d\varphi\,dz$

$$S = \int_0^5\int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2\,d\varphi\,dz = 2\int_0^5\int_{30}^{120} d\varphi . dz$$

$$= 2.5.\varphi\Big|_{30}^{120} = 2.5.90 = 5\pi\ m^2 = 15{,}7\ m^2$$

Silindirik koordinatlarda verilen vektörler Kartezyen koordinatlarda ifade edilebilir tersine geçerlidir. $\bar{A} = A_r \bar{a}_r + A_\varphi \bar{a}_\varphi + A_z \bar{a}_z$'yi $\bar{A}_x a_x + A_y \bar{a}_y + A_z \bar{a}_z$'ye dönüştürmek istiyelim.

$A_z = A_z$ olur.

$$A_x = A\,\bar{a}_x = A_r \bar{a}_r \cdot \bar{a}_x + A_\varphi \bar{a}_\varphi \bar{a}_x + A_z \underbrace{\bar{a}_z \cdot \bar{a}_x}_{0\ (\cos 90 = 0)}$$

$\bar{a}_r \cdot \bar{a}_x = \cos\varphi$ ve $\bar{a}_\varphi \bar{a}_x = \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin\varphi$

$$A_x = A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$$

$$A_y = \bar{A}\bar{a}_y = A_r a_r a_y + A_\varphi a_\varphi a_y$$

$$\bar{a}_r \cdot \bar{a}_y = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin\varphi$$

$$\bar{a}_\varphi \bar{a}_y = \cos\varphi$$

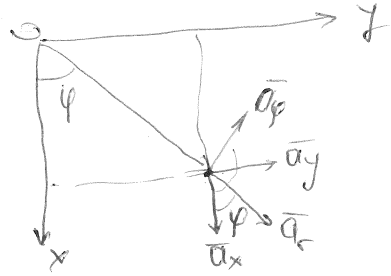
$$A_y = A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$$

noktanın silindirik koordinattan (r, φ, z) kartezyene (x, y, z)'ye dönüşümü

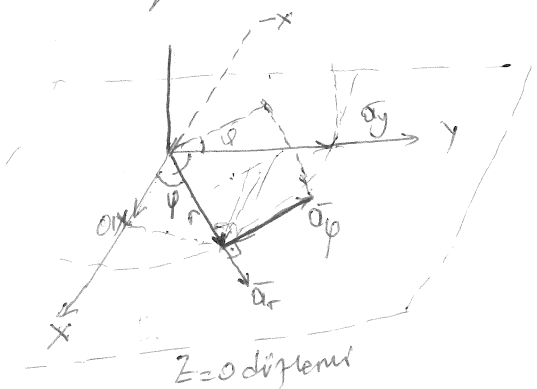
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

matris formunda

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$



Kartezyen sistemden silindirik koordinat sistemine dönüşüm



z=0 düzlemi

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

$$a_x = \bar{a}_r \cos\varphi - \bar{a}_\varphi \sin\varphi$$
$$\bar{a}_y = \bar{a}_r \sin\varphi + \bar{a}_\varphi \cos\varphi$$

Not: Tüm vektörler aynı düzlemde

$\bar{a}_x \cdot \bar{a}_r = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi$
$\bar{a}_y \cdot \bar{a}_r = \sin\varphi$
$\bar{a}_z \cdot \bar{a}_r = 0$

$\bar{a}_x \cdot a_\varphi = -\sin\varphi$
$\bar{a}_y \cdot a_\varphi = \cos\varphi$
$a_z \cdot a_\varphi = 0$

$\bar{a}_x \cdot \bar{a}_z = 0$
$\bar{a}_y \cdot a_z = 0$
$a_z \cdot a_z = 1$

$$A = A_x \bar{a}_x + A_y \bar{a}_y + A_z \bar{a}_z \Rightarrow \quad \bar{A} = A_r \bar{a}_r + A_\varphi \bar{a}_\varphi + A_z \bar{a}_z$$

$$A = (A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi)\,\bar{a}_r + (-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi)\,\bar{a}_\varphi + A_z \bar{a}_z$$

Silindirik koordinatlar

$P(r_1, \varphi_1, z_1)$

$\bar{a}_r \times \bar{a}_\varphi = \bar{a}_z$

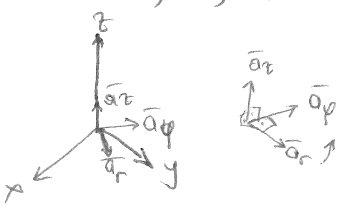
$\bar{a}_\varphi \times \bar{a}_z = \bar{a}_r$

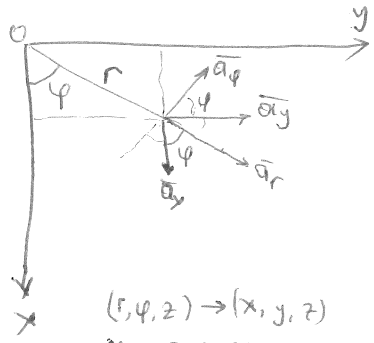
$\bar{a}_z \times \bar{a}_r = \bar{a}_\varphi$

$dl = dr\,\bar{a}_r + r\,d\varphi\,\bar{a}_\varphi + dz\,\bar{a}_z$

$dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$\bar{A} = A_r\bar{a}_r + A_\varphi\bar{a}_\varphi + A_z\bar{a}_z$





$(r, \varphi, z) \to (x, y, z)$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

ters dönüşüm

$\bar{A} = A_r\bar{a}_r + A_\varphi\bar{a}_\varphi + A_z\bar{a}_z \overset{\text{fo}}{\Longrightarrow} \bar{A} = A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z$

$A_x = \bar{A}\cdot\bar{a}_x$

$= A_r\,\bar{a}_r\cdot\bar{a}_x + A_\varphi\,\bar{a}_\varphi\cdot\bar{a}_x + A_z\,\underbrace{\bar{a}_z\cdot\bar{a}_x}_{0}$ (0 olur.)

$\bar{a}_r\cdot\bar{a}_x = \cos\varphi$ ve $\bar{a}_\varphi\cdot\bar{a}_x = 1.1.\cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin\varphi$

$A_x = A_r\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$

$A_y = \bar{A}\cdot\bar{a}_y$

$= A_r\bar{a}_r\,\bar{a}_y + A_\varphi\,\bar{a}_\varphi\,\bar{a}_y + A_z\,\underbrace{\bar{a}_z\cdot\bar{a}_y}_{0}$ (0)

$\bar{a}_r\cdot\bar{a}_y = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin\varphi$

$\bar{a}_\varphi\cdot\bar{a}_y = \cos\varphi$

$s = r\alpha$

$A_y = A_r\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$ $\qquad A_z = A_z$ dır.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Ö. $A = 3\cos\varphi\,\bar{a}_r - 2r\,\bar{a}_\varphi + z\,\bar{a}_z$ vektör alanı ise

a) $P(4, 60°, 5)$ teki alan değeri, b) P'deki $A_P \Rightarrow$ kartezyene dönüştür

c) P noktasının kommunu kartezyen koord ifade et.

a) $P(r=4, \varphi=60°, z=5) \Rightarrow A_P = (3.\cos 60°)\bar{a}_r - (2.4)\bar{a}_\varphi + 5\bar{a}_z = \frac{3}{2}\bar{a}_r - 8\bar{a}_\varphi + 5\bar{a}_z$ olur.

b) $$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 & 0 \\ \sin 60 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,68 \\ -2,70 \\ 5 \end{bmatrix}$$

c) $x = r\cos\varphi = 4\cos 60$, $y = 4.\sin 60$, $z = z$ $\quad (4\cos 60, 4\sin 60, 5)$ veya $(2, 2\sqrt{3}, 5)$

Ö. $Q(3, 4, 5)$ için $\overline{OQ}$ kommuvektörünü silindirik koord. ifade edin.

$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = 53,13°$ $\qquad \cos\varphi = 0.6$, $\sin\varphi = 0.8$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$A_r = 3\cos\varphi + 4\sin\varphi = 3.0,6 + 4.0,8 = 5$

$A_\varphi = -3\sin\varphi + 4\cos\varphi = -2,4 + 2,4 = 0$

$A_z = A_z = 5$

$A = 5\bar{a}_r + 5\bar{a}_z$

Ö. $P_1(4, 60°, 1)$ ve $P_2(3, 180°, -1)$ arasındaki uzaklık (cevap: $\sqrt{41}$)

Koordinat Sistemleri ile ilgili Dönüşüm Örnekleri

Örnek:

Örnek $\bar{B} = z\bar{a}_x + (1-x)\bar{a}_y + \frac{y}{x}\bar{a}_z$ Kartezyen Koordinat Sisteminde veriliyor.
Bu vektörü Silindirik sistemde ifade ediniz.

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan\varphi \\ \bar{a}_x = (\bar{a}_r\cos\varphi - \bar{a}_\varphi\sin\varphi) \\ \bar{a}_y = (\bar{a}_r\sin\varphi + \bar{a}_\varphi\cos\varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = (x^2+y^2)^{1/2} \end{cases}$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$\bar{B} = (z\cos\varphi + \sin\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi)\bar{a}_r + (-z\sin\varphi + \cos\varphi - r\cos^2\varphi)\bar{a}_\varphi + \tan\varphi\,\bar{a}_z$$

bulunur.

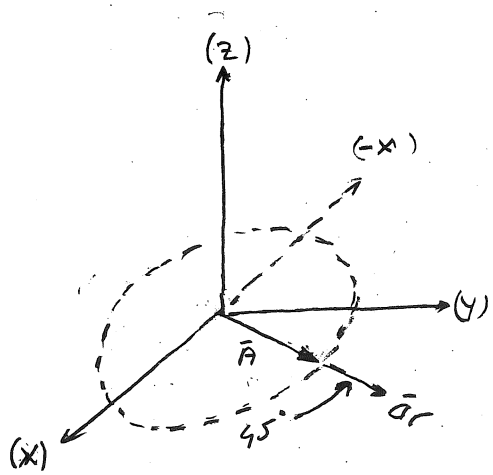
Örnek $\bar{A} = y\bar{a}_x + x\bar{a}_y + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}}\bar{a}_z$ Kartezyen K. Sisteminde verilen vektörü silindirik sistemde ifade ediniz.

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} = x\cdot\frac{x}{r} = r\cos\varphi\,\frac{r\cos\varphi}{r} = r\cos^2\varphi \text{ bulunur.}$$

$\bar{A} = r\sin\varphi\,\bar{a}_x + r\cos\varphi\,\bar{a}_y + r\cos^2\varphi\,\bar{a}_z$, $\bar{a}_x$ ve $\bar{a}_y$ yerlerine yazılırsa

ve $A = (2r\sin\varphi\cos\varphi)\bar{a}_r + (r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi)\bar{a}_\varphi + (r\cos^2\varphi)\bar{a}_z$ bulunur.

Örnek 10 birim şiddetli 45° ile orjinden çıkan $\bar{A}$ vektörü $(10, \pi/4, 0)$ koordinatlarındadır. Kartezyen sistemde gösteriniz.



$$\begin{cases} 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ radyan} \\ \bar{A} = (10, \pi/4, 0) = (10\bar{a}_r, 45^\circ\bar{a}_\varphi) \end{cases}$$

$$\bar{A} = 10\,\bar{a}_r$$

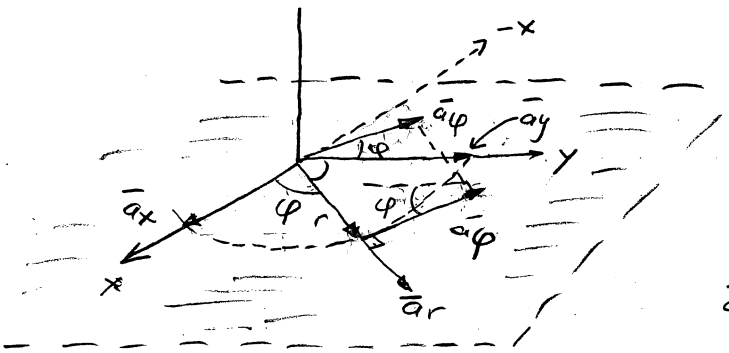
$$\bar{A}_x = 10\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$A_y = 10\sin\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$A_z = 0$$

$$\bar{A} = \frac{10}{\sqrt{2}}\bar{a}_x + \frac{10}{\sqrt{2}}\bar{a}_y \text{ bulunur.}$$

Kartezyen Sistemden Silindirik Koordinat Sistemine Dönüşüm



$z=0$ düzlemi

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \hat{\varphi} = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$r = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$$

$$x = r.\cos\varphi$$

$$y = r.\sin\varphi$$

$$z = z$$

$$\bar{a}_x = \bar{a}_r.\cos\varphi - \bar{a}_\varphi.\sin\varphi$$

$$\bar{a}_y = \bar{a}_r.\sin\varphi + \bar{a}_\varphi.\cos\varphi$$

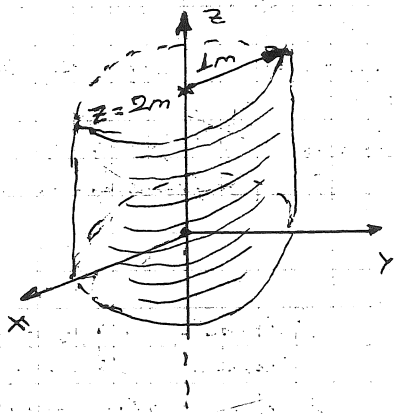
Not: Tüm vektörler aynı düzlemde

$\bar{a}_x.\bar{a}_r = 1.1.\cos\varphi$	$\bar{a}_x.\bar{a}_\varphi = -\sin\varphi$	$\bar{a}_x.\bar{a}_z = 0$
$\bar{a}_y.\bar{a}_r = \sin\varphi$	$\bar{a}_y.\bar{a}_\varphi = \cos\varphi$	$\bar{a}_y.\bar{a}_z = 0$
$\bar{a}_z.\bar{a}_r = 0$	$\bar{a}_z.\bar{a}_\varphi = 0$	$\bar{a}_z.\bar{a}_z = 1$

$$\bar{A} = \bar{A}_x.\bar{a}_x + \bar{A}_y.\bar{a}_y + \bar{A}_z.\bar{a}_z = \bar{A} = A_r.\bar{a}_r + \bar{A}_\varphi\,\bar{a}_\varphi + \bar{A}_z\,\bar{a}_z$$

$$* \ \bar{A} = (A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi)\bar{a}_r + (-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi)\bar{a}_\varphi + A_z a_z \text{ olur.}$$

Örnek $0<\varphi<\pi/2$ aralığındaki kavisli yüzeyin hacmini bulunuz



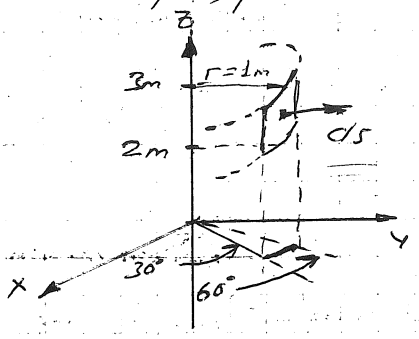
$$V=\int_{r_a}^{r_b}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\int_{z_a}^{z_b} r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$=\int_0^1 r\,dr\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 dz$$

$$=\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1\left.\varphi\right|_0^{\pi/2}\left.z\right|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\pi/2\cdot 2=\frac{\pi}{2}\ m^3$$

Örnek 1m yarıçaplı bir silindirden şekildeki parça çıkarılıyor. Alanı tanımlayınız.



$$ds=r\,d\varphi\cdot dz$$

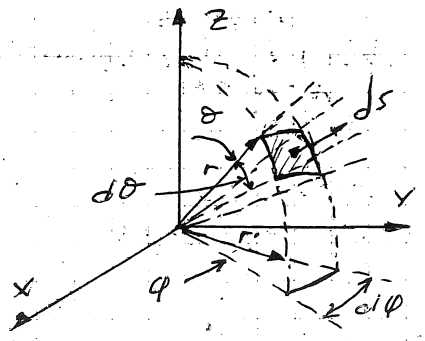
$$S=r\int_{30^\circ}^{60^\circ}d\varphi\int_2^3 dz$$

$$=1\left.\varphi\right|_{\pi/6}^{\pi/3}\left.z\right|_2^3$$

$$=1\cdot\frac{\pi}{6}\cdot 1=\frac{\pi}{6}\ m^2$$

Örnek. Yatay kesilmiş 1/2 alanlık bir küre kabuğunun yarıçapı 1m dir. Alanını bulunuz.

Not = "ds" kesilmiş küreden küçük bir parçadır.



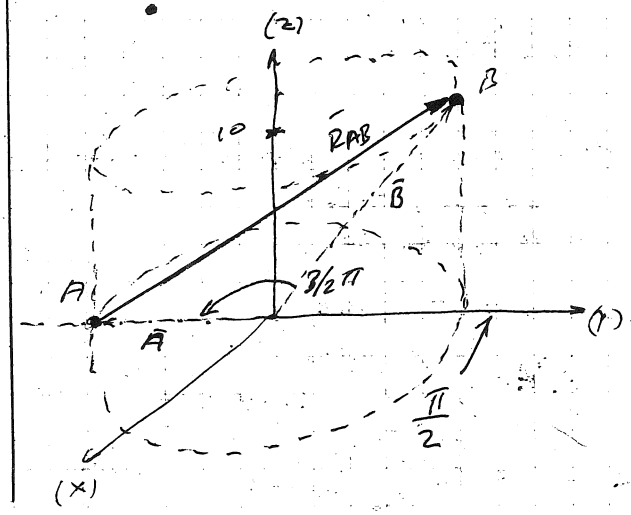
$$S=r^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\,\sin\theta$$

$$=1^2\cdot 2\pi\cdot\left.-\cos\theta\right|_0^{\pi/2}$$

$$=2\pi\left(-(\cos\pi/2-\cos 0)\right)$$

$$=2\pi \text{ bulunur.}$$

Örnek $A(5,3\pi/2,0)$ ve $B(5,\pi/2,10)$ şeklindeki iki noktanın silindirik koordinat sisteminde verilmiştir. Noktalar arası mesafeyi bulunuz.



$\bar{A}=-5\bar{a}_y$
$\bar{B}=5\bar{a}_y+10\bar{a}_z$ } iki vektör tanımlanabilir.

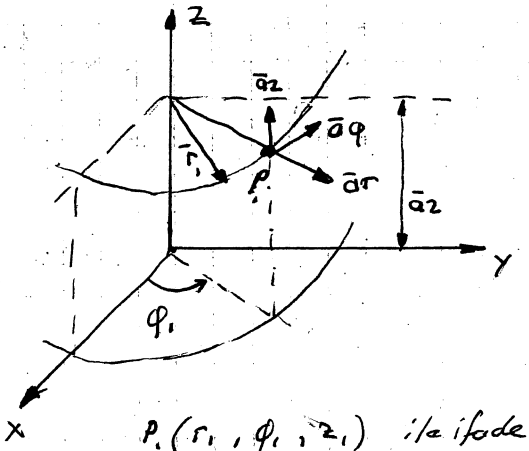
$\bar{R}_{AB}=(10\bar{a}_y+10\bar{a}_z)$ olarak bulunur.

$|\bar{R}_{AB}|=(10^2+10^2)^{1/2}=\sqrt{200}$ olur.

$$\bar{R}_{AB}=(B)-(A)=\begin{array}{r}0\ \ 5\ \ 10\\ -0\ \ -5\ \ 0\\ \hline 10\bar{a}_y+10\bar{a}_z\end{array}$$

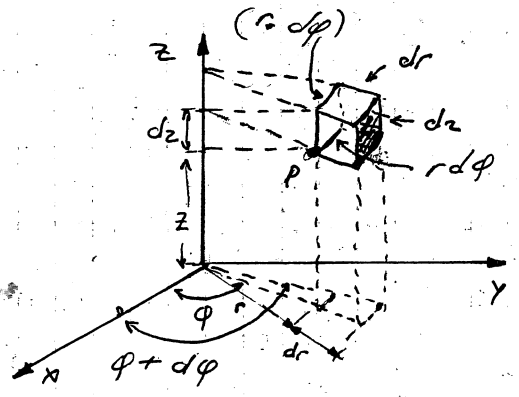
Silindirik koordinat Sistemi (Cylindrical Coordinate Sys.)

Bu sistem, analitik geometride kutupsal koordinatların üç boyuta çevrilmiş halidir.
Üç eksen tanımlama yerine r (yaricap) φ (x ekseni ile yapılan açı) ve z (yükseklik olarak tanımlanır.



Sistemde; r yçapında bir dairesel düzlem
z ile orjine uzaklığı bilinen bir z düzlemi ile φ açı ile yeri belirlenen φ düzlemlerinden oluşur

$P_1(r_1, \varphi_1, z_1)$ ile ifade edilir.



→ Birim hacim elemanı

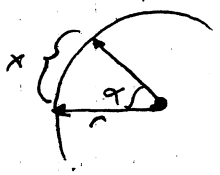
T. Hacim $(dV) = r.d\varphi.dr.dz$

$$S = \int_{z_a}^{z_b}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} (r.d\varphi)(dz)$$

$$\begin{cases} A = \int_a^b dS \\ (S) \\ V = \int_a^b dV \end{cases}$$

$$V = \int_{r_0}^{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\int_{z_0}^{z} r.d\varphi.dr\,dz$$

Açıklama



r = yaricap
α = radyan olmalı
x = α . r olur.

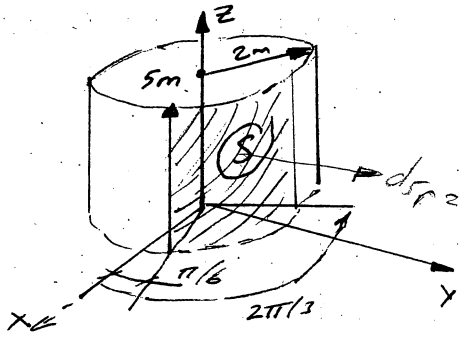
Örnek 1: 1 m çaplı bir dairenin 1/4 yayının uzunluğunu bul.

1. yol *) $2.\pi.r = 2.\pi.0{,}5 = 3{,}14$ m tam çevre
$\pi.d^2 = \pi.1^2 = 3{,}14$ m " "
$3{,}14/4 = 0{,}789 = 1/4$ çevre

2. yol *) $r.\alpha = 0{,}5.(90/57) = 0{,}789$ m

Örnek 2: Silindirik koordinat sisteminde şekildeki taralı yüzeyin alanını bulunuz.

$h = 5$ m , $r = 2$ m
$30° \leq \varphi \leq 120°$



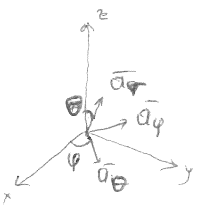
$ds = r.d\varphi.dz$

$$S = \int_0^5\int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2.d\varphi.dz$$

$$= 2\int_0^5\int_{30}^{120} d\varphi.dz$$

$$= 2.5.\varphi\Big|_{30}^{120} = 2.5.90 = 5\pi\ m^2 = 15.7$$

Küresel koordinatlar.



$P(r, \theta, \varphi)$

$\bar{a}_r \times \bar{a}_\theta = \bar{a}_\varphi$

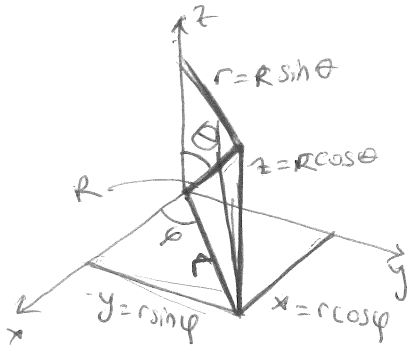
$\bar{a}_\theta \times \bar{a}_\varphi = \bar{a}_r$

$\bar{a}_\varphi \times \bar{a}_r = \bar{a}_\theta$

$dl = dr\,\bar{a}_r + r\,d\theta\,\bar{a}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\bar{a}_\varphi$

$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$\bar{A} = A_r \bar{a}_r + A_\theta \bar{a}_\theta + A_\varphi \bar{a}_\varphi$



$x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$

Ö (4, -6, 12) kartezyen koordinatlarını küresel koord. dönüştür (Cevap (R, θ, φ) $(14, 31°, 303,7°)$)

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$ $\tan\theta = \frac{r}{z}$ $r = \frac{x}{\cos\varphi}$ $R = \frac{r}{\sin\theta}$

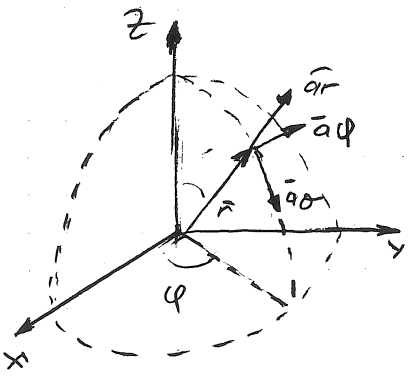
Ö a_z birim vektörünü küresel koord. ifade edinin.. ($\bar{a}_z \neq \bar{a}_R R\cos\theta$ $\bar{a}_z \neq \cos\theta\,\bar{a}_R$

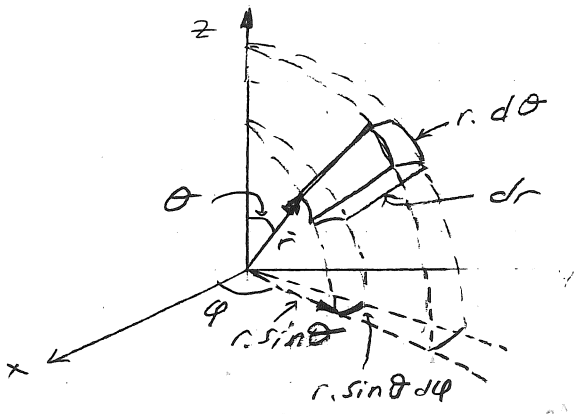
$\bar{a}_z \neq \bar{a}_R$ ve her tetikrin $1 \neq R\cos\theta$)

$\bar{a}_z \cdot \bar{a}_R = \cos\theta$, $\bar{a}_z \cdot \bar{a}_\theta = -\sin\theta$, $a_z \cdot a_\varphi = 0$

$a_z = \cos\theta\,\bar{a}_R - \sin\theta\,\bar{a}_\theta$

Küresel Koordinat Sistemi (Spherical Coordinate System)





$d\bar{l} = dr\,\bar{a}_r + r\,d\theta\,\bar{a}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\bar{a}_\varphi$

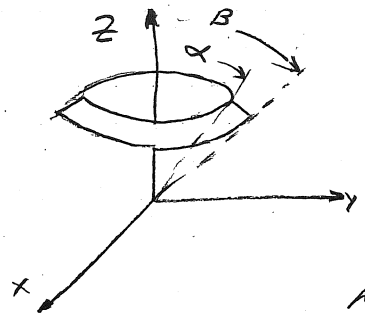
$\bar{A} = A_r\bar{a}_r + A_\theta\bar{a}_\theta + A_\varphi\bar{a}_\varphi$

$\bar{a}_r \times a_\theta = \bar{a}_\varphi$

$dv = r^2 . \sin\theta . dr\, d\theta . d\varphi$

$V = \int r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta . d\varphi$

Örnek: K. K. Sisteminde şekil verilen yüzeysel parça $\alpha \leq \theta \leq \beta$ aralığında ve "a" yarıçapındadır. Bu parçanın alanını bulunuz.



$ds = r^2 \sin\theta . d\theta . d\varphi$

$S = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\alpha^\beta \sin\theta . d\theta$

$= a^2 . 2\pi . (\cos\alpha - \cos\beta)$ olarak bulunur.

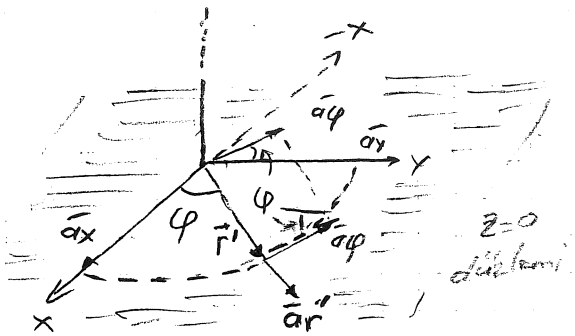
Not: eğer yüzey tam küresel olsaydı

$S = a^2\, 2\pi\, (\cos 0 - \cos\pi) = 4\pi a^2$ çıkar.

Kartezyenden Küresele, Küreselden Kartezyene dönüşüm

$x = r.\sin\theta . \cos\varphi$ $\quad y = r.\sin\theta \sin\varphi$ $\quad z = r.\cos\theta$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad \cos\theta = \dfrac{z}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r}}$ $\quad \tan\varphi = \dfrac{y}{x}$

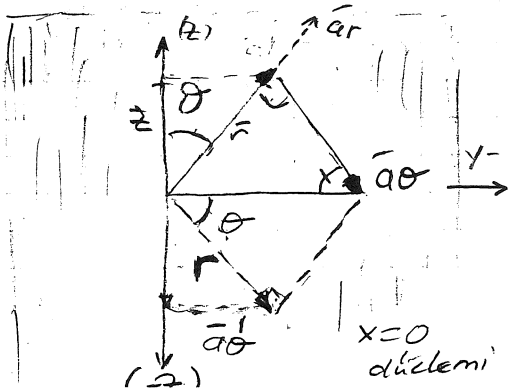


birim vektörler

$\bar{a}_r . \bar{a}_z = \bar{a}_z . \bar{a}_r = \cos\theta$

$\bar{a}_\theta . \bar{a}_z = \bar{a}_z\, \bar{a}_\theta = -\sin\theta$

$\bar{a}_\varphi . \bar{a}_z = \bar{a}_z\, \bar{a}_\varphi = 0$



$\bar{a}_r . \bar{a}_x = \sin\theta . \cos\varphi$

$\bar{a}_\theta . \bar{a}_x = \cos\theta . \cos\varphi$

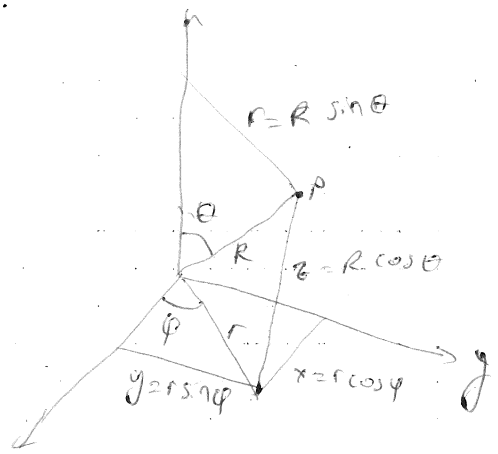
$\bar{a}_\varphi . a_x = -\sin\varphi$

$\bar{a}_r . \bar{a}_y = \sin\theta \sin\varphi$

$\bar{a}_\theta . \bar{a}_y = \cos\theta . \sin\varphi$

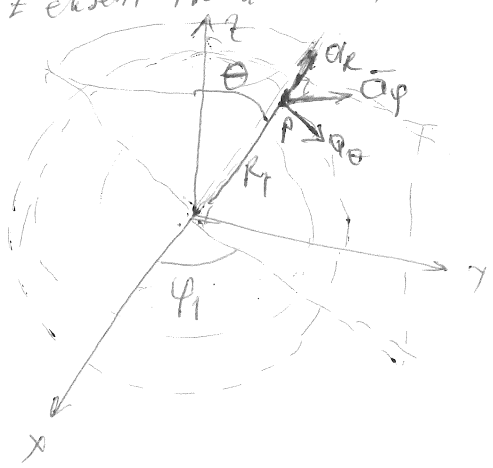
$a_\varphi . a_y = \cos\varphi$

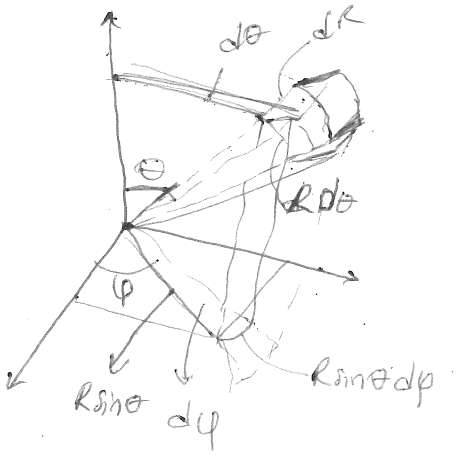
Not: $\bar{a}_\theta$ önce x-y düzlemine kesinir


r = R sin θ
P
θ
R
z = R cos θ
φ
r
y = r sin φ
x = r cos φ
y

Küresel koordinatlar.

Küresel koordinatlarda bir $P(R_1, \theta_1, \varphi_1)$ noktası üç yüzeyin kesişimi olarak belirlenir: Merkezi orijinde olan ve yarıçapı $R=R_1$ olan küresel yüzey, köşesi orijinde olan, ekseni z ekseni ile çakışan ve $\theta=\theta_1$ yarım açısına sahip bir dik çembersel koni ve kenarı z ekseni ile çakışan, xz düzlemi ile $\varphi=\varphi_1$ açısı yapan yarı-düzlem.





Küresel koordinatlarda bir vektör

$$A = A_R \bar{a}_R + A_\theta \bar{a}_\theta + A_\varphi \bar{a}_\varphi$$ olarak yazılır.

Bir vektor diferansiyel uzunluk

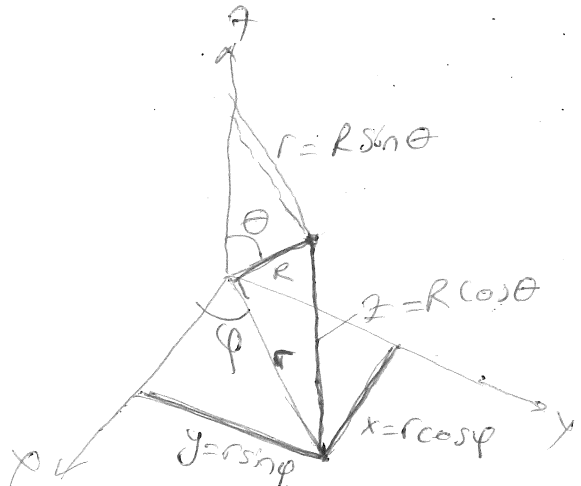
$$dl = dR\,\bar{a}_R + R\,d\theta\,\bar{a}_\theta + R\sin\theta\,d\varphi\,\bar{a}_\varphi$$

Bir diferansiyel hacim

$$dV = R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

Aşağıdaki şekil bir P noktasını belirleyen (x, y, z), (r, φ, z) ve (R, θ, φ) üçey değişkenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Aşağıdaki eşitlikler, küresel koordinatlardaki koordinat değişkenlerini kartezyen koordinatlardaki değişkenlere dönüştürür.

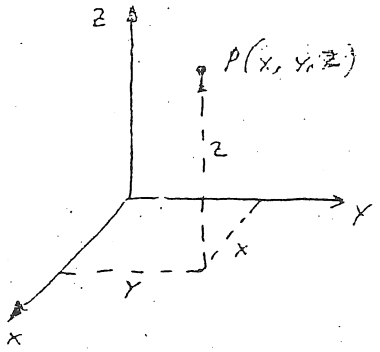
$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$



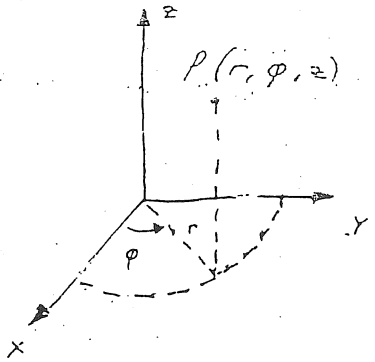
ELEKTRONİK

Koordinat Sistemlerinin Karşılaştırılması

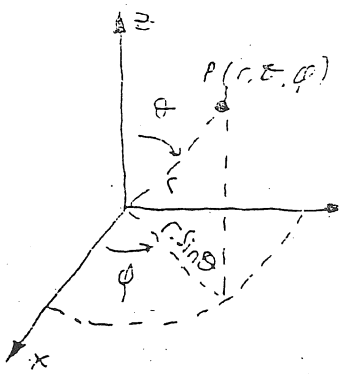
a) Kartezyen



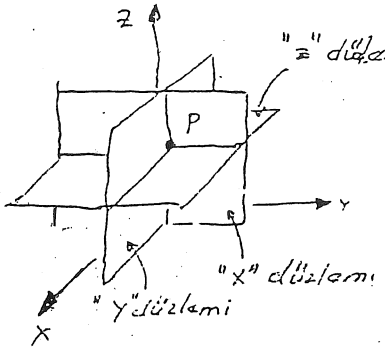
b) Silindirik

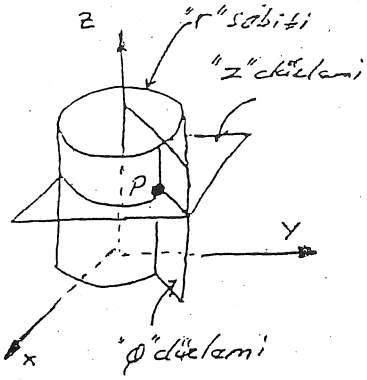


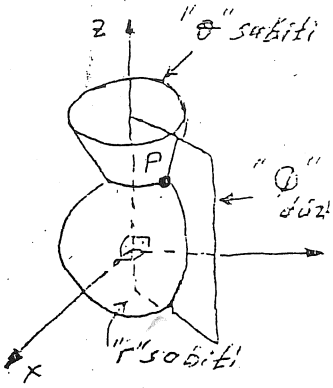
c) Küresel



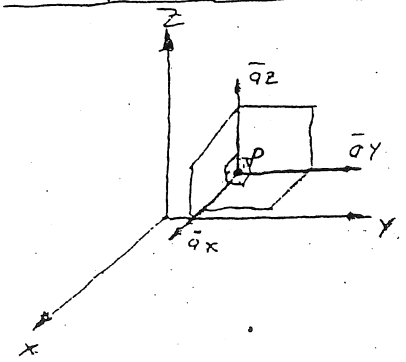
Noktaların panel sürtaşıllıkları

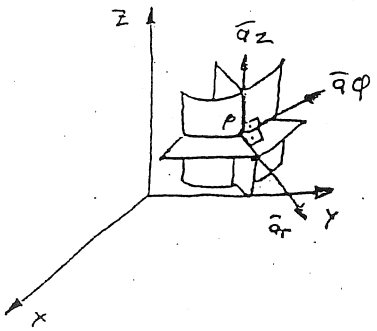


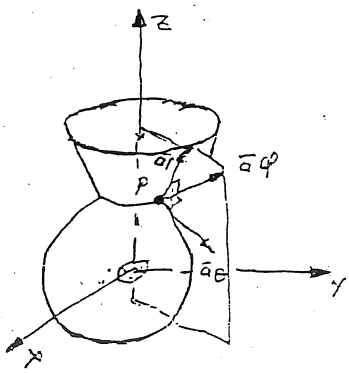




Yüzey düzlemleri ve sabitler







Birim vektörler

$\bar{A} = A_x \bar{a}_x + A_y \bar{a}_y + A_z \bar{a}_z$ (kartezyen sis.)
$\bar{A} = A_r \bar{a}_r + A_\varphi \bar{a}_\varphi + A_z \bar{a}_z$ (Silindrik sis.) Vektör bileşenl
$\bar{A} = A_r \bar{a}_r + A_\theta \bar{a}_\theta + A_\varphi \bar{a}_\varphi$ (küresel sis.)

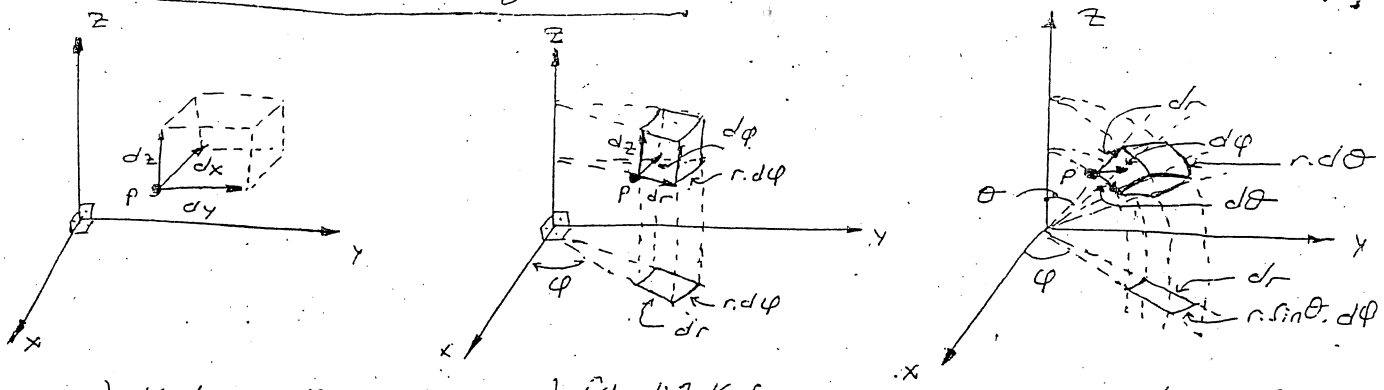
$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (kartezyen sis.) Türevsel
$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$ (silindirik sis) uzunluklar
$dl^2 = dr^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 r^2 \sin^2\theta$ (küresel sis)

$\bar{a}_x \times \bar{a}_y = \bar{a}_z$ (kar. sis.) Birim vektör
$\bar{a}_r \times \bar{a}_\varphi = \bar{a}_z$ (sil. sis) çarpımları
$\bar{a}_r \times \bar{a}_\theta = \bar{a}_\varphi$ (kür. sis)

$dv = dx.dy.dz$ (kar. sis)
$dv = r.dr.d\varphi.dz$ (sil. sis)
$dv = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$ (kür. sis)

$ds = (r.d\varphi).dz$ (S.K.S.)
$ds = (r.d\theta)(r\sin\theta.d\varphi)$ (K.K.S.
$= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

Hacimlerin üç-sistemde gösterilişi



a) Kartezyen K.S. b) Silindirik K.S. c) Küresel K.S.

Kartezyenden Küresele Dönüşüm

$x = r.\sin\theta.\cos\varphi \qquad y = r.\sin\theta.\sin\varphi \qquad z = r.\cos\theta$

$A_r = A_x \sin\theta.\cos\varphi + A_y \sin\theta \sin\varphi + A_z.\cos\theta.$

$A_\theta = A_x \cos\theta.\cos\varphi + A_y \cos\theta.\sin\varphi - A_z \sin\theta$

$A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$

Küreselden Kartezyene Dönüşüm

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

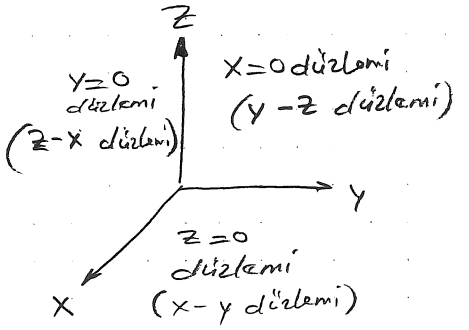
$$A_x = \frac{A_r x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta x z}{\sqrt{(x^2+y^2)}\,(x^2+y^2+z^2)} - \frac{A_\varphi y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

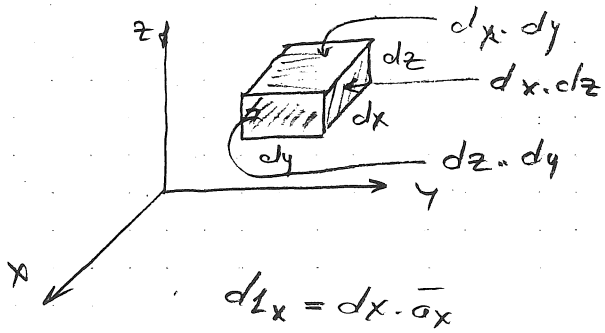
$$A_y = \frac{A_r y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta y z}{\sqrt{(x^2+y^2)}\,(x^2+y^2+z^2)} + \frac{A_\varphi x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$A_z = \frac{A_r z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{A_\theta \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Koordinat Sistemleri

1) Kartezyen Koordinat Sistemi (Dekart Koor. Sistemi)





$$dl_x = dx \cdot \bar{a}_x$$
$$dl_y = dy\, \bar{a}_y$$
$$dl_z = dz\, \bar{a}_z$$

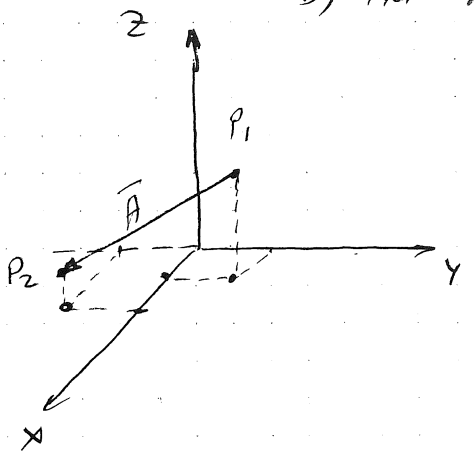
Hacim $\Rightarrow$ $dv = dx \cdot dy \cdot dz$

Uzunluk $\Rightarrow$ $dl = dx\bar{a}_x + dy\bar{a}_y + dz\bar{a}_z$

Örnek 1 $P_1(1,2,3)$, $P_2(2,-2,1)$ iki noktayı

a) K.K. Sisteminde gösteriniz.

b) iki nokta arasına çizilecek vektörü tanımlayınız.



İki noktaya çizilecek vektörü

$\bar{A}_{12} = P_2 - P_1$ şeklinde düşünülür

$$P_2\,(2\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + 1\bar{a}_z)$$
$$P_1\,(\mp 1\bar{a}_x \mp 2\bar{a}_y \mp 3\bar{a}_z)$$
$$\bar{A}_{21} = \bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 2\bar{a}_z$$

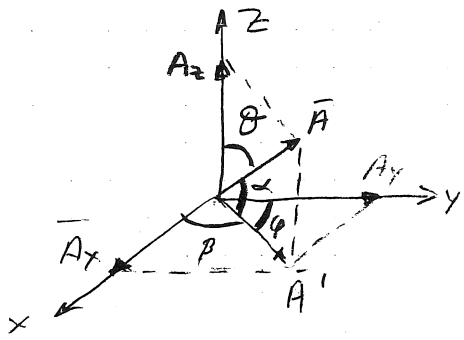
c) şiddeti bulunuz

$$|\bar{A}_{21}| = \sqrt{a_x^2 - 4\bar{a}_y - 2\bar{a}_z} = \sqrt{1^2 - 4^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

d) Birim vektörü hesaplayınız.

$$\bar{a}_{12} = \frac{\bar{A}_{12}}{|\bar{A}_{12}|} = \frac{\bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 2\bar{a}_z}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\bar{a}_x - \frac{4}{\sqrt{21}}\bar{a}_y - \frac{2}{\sqrt{21}}\bar{a}_z$$

Çalışma 1: $|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ eşitliği ispatlayınız.



$$\bar{A}_x = A' \cdot \cos\beta$$
$$\bar{A}_y = A' \cdot \cos\varphi$$
$$\bar{A}_z = A \cdot \cos\theta$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A'^2 \cos^2\beta + A'^2 \cos^2\varphi + A^2 \cos^2\theta}$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A'^2(\cos^2\beta + \cos^2\varphi) + A^2\cos^2\theta}$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A'^2(1) + A^2\cos^2\theta}$$

$\beta + \varphi = 90^\circ$

$\cos^2\beta + \cos^2\varphi = 1$

arkada

$$|\bar{A}'| = \bar{A} \cdot \cos\alpha$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A^2 \cdot \cos^2\alpha + A^2 \cdot \cos^2\theta} = \sqrt{A^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\theta)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \theta = 90^\circ \\ \cos^2\alpha + \cos^2\theta = 1 \end{cases}$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{\bar{A}^2 \cdot (1)} = |\bar{A}| = \sqrt{\bar{A}^2} \Rightarrow A = A$$ olarak bulunur.

1: Skaler ve Vektörel Büyüklükler

Bazı fiziksel büyüklükler bir sayı ile ifade edilirler. Örneğin; oda sıcaklığı, yoğunluk, basınç, akım v.b. Bu tür büyüklüklüklerin ifadesi oldukça kolay olup koordinat eksenlerine gerek yoktur. Bu büyüklüklere "skaler büyüklük" denir.

Skaler büyüklüklerin elinde bazı büyüklükleri ancak koordinat eksenlerinde ifade etmek mümkündür. Örneğin bir kuvvetten söz edilirken kuvvetin yönünde önemlidir. İşte hız, ivme, gibi büyüklükler "vektörel büyüklük" olarak ifade edilirler.

Fizikte incelenen kavramların bazıları uzayın belirli bir bölgesinde sürekli dağılmış olabilir. Dolayısıyla bu büyüklükleri incelerken her ayrı bölgede tanımlayacak bir şekilde ifade etmek gerekir. Böylece "alan" kavramı ortaya çıkar. İncelenen büyüklükler skaler ise "skaler alan", vektörel ise "vektörel alan" olarak isimlendirilirler.

Homojen bir ortamda kütle yoğunluğu, basınç dağılımı, nem dağılımı skaler alanlara, belirli bir bölgede bulunan partiküllerin oluşturduğu hız ise, vektörel alana örnektir.

Eğer alan, zamandan bağımsız ise "statik", zamanla değişimi sözkonusu ise, "dinamik" alan olarak isimlendirilir.

Not * Hiçbir fiziksel büyüklüktaki değişimin tam zaman sabiti yoktur.
* Eğer değişimler büyük fakat yavaş ise "kuasistatik" olarak ifade edilir.

Elektromağnetik alan çeşitleri;
a) Statik Elektrik Alanları,
b) " Mağnetik " ,
c) Elektro " " , olarak üç grupta toplanırlar.

- Elektrik yükleri izlenen noktaya göre durgunda bulunuyorlarsa, zamandan bağımsız bir statik Elektrik Alanı oluştururlar.
- Yüklerin bağıl hareketleri söz konusu ise, Statik Elek. Alanına mağnetik Alan isimli kuvvet ortaya çıkar. Bu olayım iki ayrı grupta incelenir.
1- Yükler gözlem noktasına göre sabit hızla hareket ederlerse "statik mağnetik alan",
2- Yükler ivmeli hareket ediyorlarsa, "elektro mağnetik alan"

Her bir maddenin pozitif ve negatif yüklerden oluştuğu ve en küçük yükbirimini atomu oluşturan elektron ve protonlar olduğu bilinmektedir.

Durgun veya hareketli yükler, duran veya hareket eden diğer yükler üzerine kuvvet uygularlar. Uygulanan kuvvet alanlarına "Elektrik Alanı" denir. (Yada mağnetik alan)

* DC kaynaktan beslenen alanlara "statik manyetik alan",
* Vericilerden yayılan radyo dalgaları ise "elektro manyetik alan" denir.

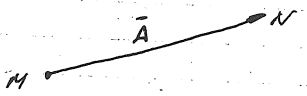
Elektrik ve manyetik alanlar, elektrik devreleri, transistörler, kapasitörler, indüktörler, elektrik motorları, TV tüpleri, güneş pilleri, v.s elemanların iç veya dışında mevcuttur.

Elektrik veya manyetik alanlar Elektrik ve Elektronigin temelidir.

Vektörler ve Koordinat Sistemleri

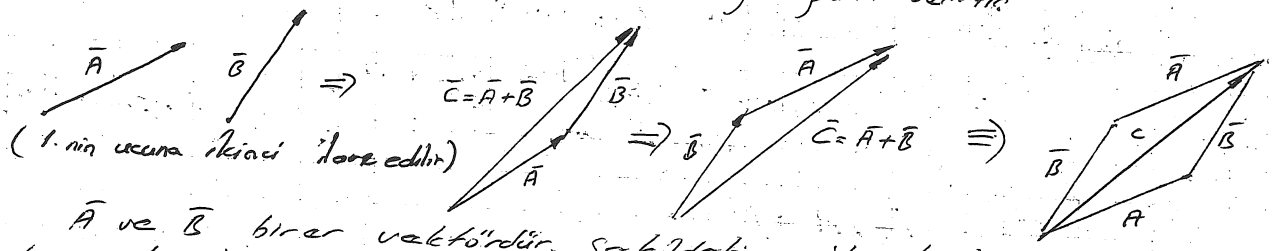
Bazı matematiksel işlemleri kolaylaştırmak nedeni ile kullanılan yöntem lerden biriside vektörel analizdir

Vektörel toplama ve çıkarma



Bir vektörel büyüklük şekildeki gibi yönlendirilmiştir. doğru parçasıdır. Yönü büyüklüğün ok yönü (yönelme yönü), uzunluğu ise değeridir.

"$\bar{A}$" veya koyu yazılmış "**A**" vektörü,
$|\bar{A}|$ veya açık yazılmış "A" vektörün büyüklüğünü belirtir

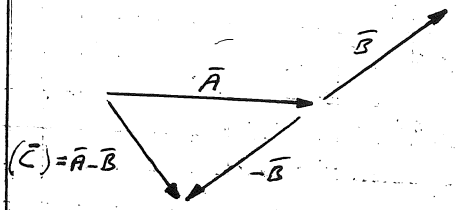


(1. nin ucuna ikinci ilave edilir)

$\bar{A}$ ve $\bar{B}$ birer vektördür. Şekildeki gibi toplanırlar. (Paralel kenar kuralı)

$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$ olarak yazılabilir.

İki vektörün farkı şekildeki gibi birisinin tersi alınarak elde edilir.



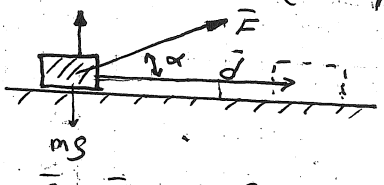
$\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$

Böylece toplama kuralı çıkartmada da geçerlidir.

(1. nin ucuna ikinci ilave edilir ve 2. nin tersi alınır.

Vektörel çarpma

a) Skalar Çarpma (dot product)



$W = \bar{F}.\bar{d} = |\bar{F}||\bar{d}|.\cos\alpha = F.d.\cos\alpha$

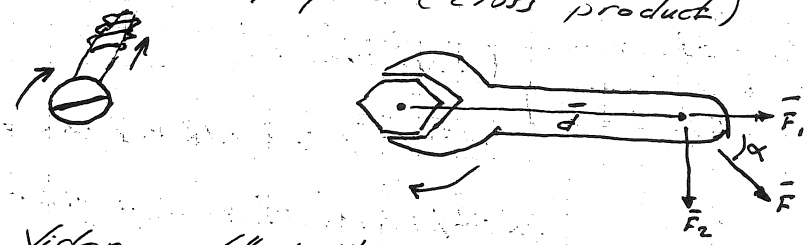
Sonuç skalar olduğu için işlema "skalar çarpma" denir.

$\bar{A} = \bar{B}$ olduğunda; $\bar{A}.\bar{B} = \bar{A}.\bar{A} = \bar{A}^2 = A^2$ olur. $(A.A.\cos\phi)$

Yer değiştirme kuralına göre; $\bar{A}.\bar{B} = \bar{B}.\bar{A}$,

$\bar{A}.(\bar{B}+\bar{C}) = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.\bar{C}$ dir.

b) Vektörel Çarpma (cross product)



Not

* Skalar çarpada vektör lara önden, üstten bakılır.
* Vektörel çarpmada ise karşıdan bakılır ve nokta görünür. (o)

Vidanın döndürülmesi $\bar{d}$ vektörü ve $\bar{F}_2$ vektörü ile ilişkilidir.

$\bar{M} = \bar{d} \times \bar{F} \Rightarrow |\bar{M}| = F.d.\sin\alpha$ olur. $(\bar{M} = \bar{F}_2.\bar{d})$

$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$, $|\bar{C}| = C = A.B.\sin\alpha$ dır.

Örnekler..

Örnek 1. $\bar{A}\cdot\bar{A} = \bar{A}^2 = A^2$ Sonuç skaler olur.

$$\bar{A} = (3\bar{x} + 6\bar{y} + 0\bar{z})$$

$$(3\bar{x}+6\bar{y}+0\bar{z})(3\bar{x}+6\bar{y}+0\bar{z}) = 3.3\bar{x}.\bar{x} + 3.6\,\bar{x}.\bar{y} + 6.3\,\bar{y}\bar{x} + 6.6\,\bar{y}.\bar{y}$$
$$= 3.3 + 6.6 = 42$$

Çünkü = 3.3.1 olur (3.3.xx)
3.6.0 olur. (3.6.x.y)
Sonuç skaler oldular.

$A = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}7$
$A^2 = 6{,}7^2 = 45$

2. $\bar{A}\times\bar{A} = 0$ Sonuç vektörel olur.

Örnek 2 $\bar{A} = (3\bar{x} + 6\bar{y}) \Rightarrow (3\bar{x}+6\bar{y})\times(3\bar{x}+6\bar{y}) = \bar{A}\times\bar{A} = 0$

$$\bar{A}\times\bar{A} = 3.3\,\bar{x}.\bar{x} + 3.6\,\bar{x}.\bar{y} + 6.3\,\bar{y}.\bar{x} + 6.6\,\bar{y}.\bar{y}$$
$$= 0 + 18\bar{z} - 18\bar{z} + 0 = 0$$!! (karşıdan bakış)

Örnek 3 $\bar{A}\cdot\bar{B} = ?$

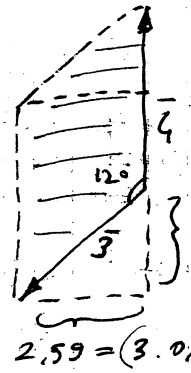
$\bar{A} = 3\bar{x} + 4\bar{y} - 2\bar{z}$
$\bar{B} = 2\bar{x} - 3\bar{y} + 5\bar{z}$

$6 - 12 - 10 = -16$

Örnek 4 $A = 5$
$\vec{B} = 3\bar{x} + 4\bar{y} - 5\bar{z}$ $\quad A\cdot\bar{B} = ?$

$A\cdot\bar{B} = 15\bar{x} + 20\bar{y} - 25\bar{z} = \vec{C}$ olur.
sonuç vektör olur.

Örnek 5 $\bar{A} = 3$, $\bar{B} = 4$ $\quad \bar{A}\times\bar{B} = \bar{C}$, $C = ?$



$C = |\bar{A}\times\bar{B}|.\sin 120° = 3.4.0{,}866 = 10{,}39$

Not dikkat edilirse iki vektörün vektör çarpımı bir alanı verir.

$S = 2{,}59 . 4 = 10{,}39\ b^2$

Örnek 6 $\bar{A} = 5\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z}$
$\bar{B} = 3\bar{x} + 2\bar{y} + 3\bar{z}$
$\bar{C} = 0 + \bar{y} + 2\bar{z}$ $\quad (\bar{A}\times\bar{B})\cdot\bar{C} = ?$

$10\bar{z} - 15y - 9\bar{z} + 9\bar{x} + 3\bar{y} - 2\bar{x} = 7\bar{x} - 12\bar{y} + \bar{z}$

$(7\bar{x} - 12\bar{y} + \bar{z})\cdot(+\bar{y} + 2\bar{z}) = -12 + 2 = -10$

Skaler çarpım (nokta çarpım)

$\vec{A}.\vec{B} \triangleq |A||B| \cos\theta_{AB}$ ($\triangleq$ tanımdan dolayı eşittir anlamına gelir).

$\theta_{AB} \Rightarrow A, B$ arasındaki küçük olan açıdır. π, (180°) den küçüktür.

İki vektörün tanımdan nokta çarpım

1- Büyüklüklerinin çarpımına eşit veya küçüktür

2- aralarındaki açı $\pi/2$ (90°) den büyük veya küçük olması pozitif veya negatif olmasına neden olur.

3- Bir vektörün büyüklüğü ile diğer vektörün ilk vektör üzerine izdüşümünün ($B.\cos\theta_{AB}$) çarpımına eşittir

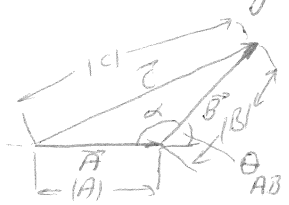
4- Vektörler bir birine dik ise sonuç sıfırdır.

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = |A|^2 \quad \text{veya} \quad A = |A| = +\sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$$

$+\sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$ herhangi bir koordinat sisteminde vektörün büyüklüğünü bulmamızı sağlar.

Ö Bir üçgende kosinüsler yasasını ispat etmek için vektörler kullanılır.



$C = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\alpha}$ kenarlar vektör kabul edilirse $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$ alınarak ispat

$$|C|^2 = \vec{C}.\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})$$
$$= \vec{A}.\vec{A} + \vec{B}.\vec{B} + 2\vec{A}\vec{B}$$
$$= |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos\theta_{AB}$$

θ_{AB} tanımdan dolayı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki küçük açı olup $(180°-\alpha)$ya eşit olduğundan $\cos\theta_{AB} = \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ olduğundan

$$C^2 = A^2+B^2-2AB\cos\alpha$$

Birim Vektörü;

Birim büyüklükte, fiziksel olarak birimsiz vektörlerdir. Uzayda yön belirleyici rol üstlenirler.

Bir $\bar{A}$ vektörünün yönündeki birim vektör $\bar{a}_A$ ile gösterilir. indis harf yönü gösterir.

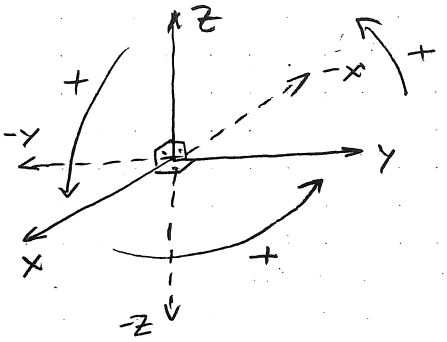
$\bar{a}_A = \dfrac{\bar{A}}{|\bar{A}|}$ olarak verilir. $\bar{A} = |\bar{A}| \cdot \bar{a}_A$ olur.

Kısaca, birim vektör bir vektörün bir yöndeki bileşenidir.

$\bar{A} \cdot \bar{a} = |\bar{A}| \cdot a \cdot \cos\varphi = |\bar{A}| \cdot 1 \cdot \cos\varphi = |\bar{A}| \cdot \cos\varphi$ olur.

Vektörlerin Vektörel Çarpımı

- İki vektörün vektörel çarpımı vektörlerin ortak yüzeylerinde bir alan verir.
- İki dik vektörün vektörel çarpımları olusan düzleme dik yeni bir vektör verir. Ancak vektör − veya + yönde olabilir.



$\bar{x} \to \bar{y} \to \bar{z} \to x$ ---- yönleri çarpımları pozitif (+) olurken

$\bar{z} \to \bar{y} \to \bar{x} \to z$ ---- yönleri çarpımları negatif (−) olur.

$$\begin{cases} \bar{x} \times \bar{y} = \bar{z}, & \bar{y} \times \bar{x} = -\bar{z} \\ \bar{z} \times \bar{x} = \bar{y}, & \bar{x} \times \bar{z} = -\bar{y} \\ \bar{y} \times \bar{z} = \bar{x}, & \bar{z} \times \bar{y} = -\bar{x} \end{cases}$$ olur.

Örnek 1 Verilen iki vektörün oluşturacakları alanı bulunuz.

$\bar{A}$ $|\bar{A}| = 3m$, $|\bar{B}| = 4m$, $\alpha = 120°$

$|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \sin\alpha$

$|\bar{A} \times \bar{B}| = 4 \cdot 3 \cdot 0{,}866 = 10{,}36$ birim^2

* İki vektörün vektörel çarpımı bir alan verir.

Örnek 2 Verilen iki vektörün çapraz çarpımını belirleyiniz.

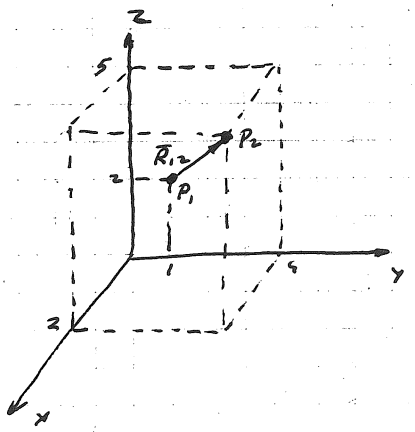
$\bar{A} = 3\bar{x} + 4\bar{y} + 2\bar{z}$
$\bar{B} = 2\bar{x} - 3\bar{y} + 5\bar{z}$ $\Big\}$ $\bar{A} \times \bar{B} = ?$

$\bar{A} \times \bar{B} = (3 \cdot -3)\,\bar{x} \times \bar{y} + (3 \cdot 5)\,\bar{x} \cdot \bar{z} + (4 \cdot 5)\,\bar{y} \cdot \bar{z} + (4 \cdot 2)\,\bar{y} \cdot \bar{x} + (2 \cdot -3) \cdot \bar{z} \cdot \bar{y}$
$+ (2 \cdot 2)\,\bar{z} \cdot \bar{x}$

$\bar{A} \times \bar{B} = -9\bar{z} - 15\bar{y} + 20\bar{x} - 8\bar{z} + 6\bar{x} + 4\bar{y}$
$= 26\bar{x} - 11\bar{y} - 17\bar{z}$

Coulomb Kanunu ile ilgili örnekler

Örn. 2 $P_1(0,1,2)$ noktasındaki $2\cdot10^{-5}$ C luk noktasal yükün $P_2(2,4,5)$ noktasındaki 10^{-6} C luk yüke boşlukta uyguladığı kuvveti bulunuz.



$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_2 - \bar{R}_1 = \overset{x_2-x_1}{(2-0)}a_x + \overset{y_2-y_1}{(4-1)}a_y + \overset{z_2-z_1}{(5-2)}a_z$$
$$= 2a_x + 3a_y + 3a_z$$

$$|\bar{R}_{12}|^2 = 2^2+3^2+3^2 \Rightarrow |\bar{R}_{12}| = R_{12} = 4{,}69$$

$$\bar{a}_{12} = \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{2\bar{a}_x + 3\bar{a}_y + 3\bar{a}_z}{4{,}69}$$

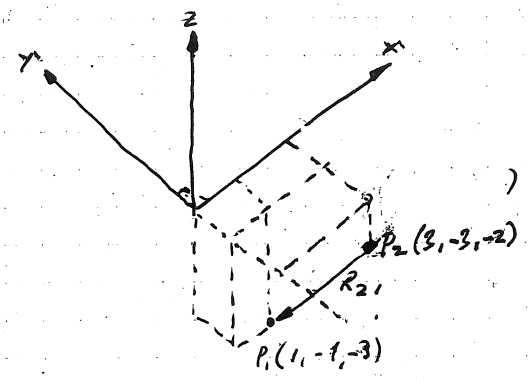
$$\bar{F} = \frac{(2\cdot10^{-5})(10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(4{,}69)^2}\cdot\frac{2a_x+3a_y+3a_z}{4{,}69}$$

$$\bar{F} = (3{,}49)a_x + (5{,}23)a_y + (5{,}23)a_z \ N$$

$$= 8{,}18\left(\frac{2\bar{a}_x + 3\bar{a}_y + 3\bar{a}_z}{4{,}69}\right) N$$

Uygulanan kuvvet ~8,18 N bulunur.

Örn 3 $q_1 = 300\,\mu C$, $F_1 = 8\bar{a}_x - 8\bar{a}_y + 4\bar{a}_z$ N olabilmesi için q_2 yükünü bulunuz.



$$\bar{F}_1 = 8\bar{a}_x - 8\bar{a}_y + 4\bar{a}_z \ N$$
$$q_2 = (3,-3,-2)\ m$$

$$\bar{R}_{21} = -2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - \bar{a}_z$$
$$|\bar{R}_{21}| = (-2^2+2^2-1^2)^{1/2} = \sqrt{9}$$

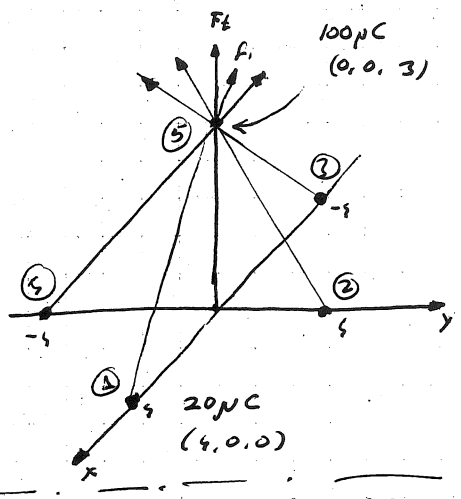
$$\bar{a}_{21} = \frac{\bar{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{-2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - \bar{a}_z}{3}$$

$$F_1 = \frac{(300\cdot10^{-6})\cdot q_2}{4\pi(10^{-9}/36\pi)3^2}\cdot\left(\frac{-2\bar{a}_x - 8\bar{a}_y + \bar{a}_z}{3}\right)$$

$F_1 = 8\bar{a}_x - 8\bar{a}_y + 4\bar{a}_z$ olursa

$q_2 = -40\,\mu C$ bulunur.

Örn 4 100 μC luk yükün bulunduğu noktaya x ve y eksenlerinden simetrik olarak 20 μC luk yüklerin etkidiğini düşünerek f_t yi bulunuz.



1. nokta $R_{15} = -4\bar{a}_x + 3\bar{a}_z$
2. " $R_{35} = -(-4\bar{a}_x) + 3\bar{a}_z$
3. " $R_{25} = -4\bar{a}_y + 3\bar{a}_z$
4. " $R_{45} = -(-4\bar{a}_y) + 3\bar{a}_z$

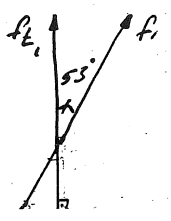
$4a_x$ dikkate alınmaz

$$|\bar{R}_t| = (-4^2+3^2)^{1/2} = 5$$
$$\bar{a}_t = \frac{-4a_x + 3a_z}{5}$$

$$f_t = \left(\frac{20\cdot10^{-6})\cdot(100\cdot10^{-6})}{4\pi\varepsilon_0(5)^2}\cdot\frac{-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_z}{5}\right) = 1{,}73\,\bar{a}_z \ N.$$

x'ler dikkate alınmaz.

veya

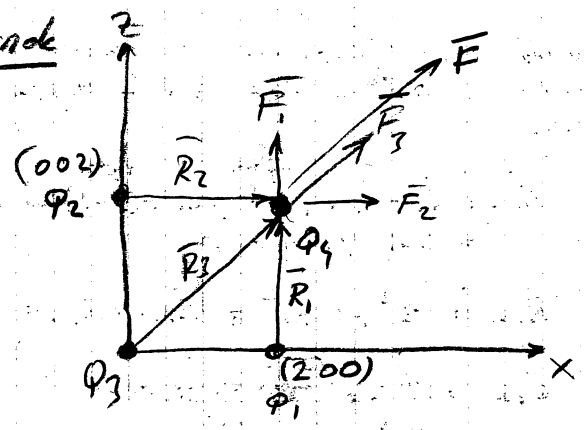


$$f_1 = \frac{(10^{-4})(20\cdot10^{-6})}{4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)5^2}\cdot\frac{-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_z}{5} = 0{,}71\cdot\bar{a}_{R_1}$$

$$f_{t_1} = 0{,}71\cdot\cos 53° = 0{,}43$$

$$f_t = 0{,}43\cdot 4 = 1{,}73\ N \text{ bulunur.}$$

Örnek



$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 200\ nC$

$Q_4 = 500\ nC$

Q_4 yüküne etkiyen toplam kuvveti belirleyiniz.

$$\bar{R}_1 = \begin{array}{r} 2\ 0\ 2 \\ -\ 2\ 0\ 0 \\ \hline +2\bar{a}_z \end{array}, \quad |\bar{R}_1| = 2, \quad \bar{a}_{R_1} = \frac{2}{2}\bar{a}_z$$

$$\bar{R}_2 = +2\bar{a}_x, \quad |\bar{R}_2| = 2, \quad \bar{a}_{R_2} = \bar{a}_x$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 2 \\ -\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{R}_3 = 2\bar{a}_x + 2\bar{a}_z \qquad |\bar{R}_3| = 2{,}823, \qquad \bar{a}_{R_3} = \frac{2}{2{,}823}\bar{a}_x + \frac{2}{2{,}823}\bar{a}_z$$

$$\bar{F}_1 = \frac{200\,10^{-9} \cdot 500\,10^{-9}}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}\, 2^2}\,\bar{a}_{R_1} = 2{,}25\,10^{-5}\,\bar{a}_z\ N$$

$$\bar{F}_2 = \text{— — — —}\ \bar{a}_{R_2} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}\,\bar{a}_x\ N$$

$$\bar{F}_3 = \frac{200 \cdot 10^{-9} \cdot 500\,10^{-9}}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}\, 2{,}823^2}\,\bar{a}_{R_3} = 8 \cdot 10^{-5}\,\bar{a}_x + 8 \cdot 10^{-5}\,\bar{a}_z\ N$$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = (305\,\bar{a}_x + 305\,\bar{a}_z)\ \mu N \quad \text{veya}$$

$\bar{F} = (305^2 + 305^2)^{1/2} = 430\ \mu N$ ile 45° açı yaparak oluşur.

Coulomb Kanunu

Elektrik yükleri arasındaki etkileşmenin, yükler çarpımı ile doğru, yükler arası mesafenin karesi ile ters orantılı olduğu biliniyor.

$$f = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2(L)} \quad (1)$$

(R) L = uzaklık (metre) m
q = yükmiktarı (Coulomb) C
k = sabit
ε_0 = Boşluğun dielektrik sabiti (F/m)
$= 8{,}854 \cdot 10^{-12} = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ (F/m)

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4\pi \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 9 \cdot 10^{9} \ \frac{N\,m^2}{C^2}$$

Elektron yükü $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Kısaca 1 C negatif yük içerisinde $6 \cdot 10^{18}$ elektron bulunur.

1 C'luk aynı işaretli iki yükün arasında 1mm mesafe bulunuyorsa, uygulanan kuvvet $9 \cdot 10^{15}$ N olur. Bu ise 9.2 10^{11} ton kütleli cismin ağırlığına eşittir.

Eğer q_1 ve q_2 yükleri arasında $\bar{R}_{12}$ gibi bir vektör ve $\bar{a}_{12}$ gibi bir birim vektörünü tanımlarsak, q_2 yüküne etkiyen kuvvet,

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \bar{R}_{12}^2} \cdot \bar{a}_{12} \quad (3)$$

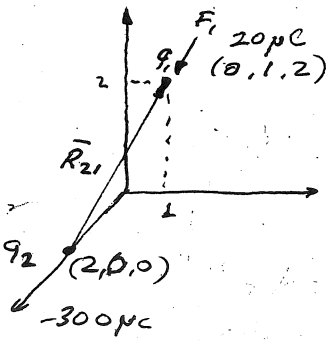
$\vec{R}_{12}$; 1. yükten 2. yüke yönelme
$\bar{a}_{12}$; birim vektörü.

Örnek 1. $q_1 = 20\mu C$, $q_2 = -300\mu C$'luk iki yük boşlukta bulunuyorlar. $q_1(0,1,2)$ m de, q_2 ise $(2,0,0)$ m de bulunuyorlar. Uygulanan kuvveti bulunuz.

$$R_{12} = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -0 & -0 \end{matrix} \Big\} -2x + y + 2z$$

$$\bar{R}_{21} = \begin{matrix} \{ & 0 & +y & +2z & \} \\ - \{ & -2x & +0 & +0 & \} \end{matrix}$$

$-2a_x + a_y + 2a_z$ elde edilir.



$$|\bar{R}_{21}|^2 = -2^2 + 1^2 + 2^2 = \sqrt{9} \quad \text{(Büyüklük)}$$

$$\bar{a}_{21} = \frac{\bar{R}_{12}}{|\bar{R}_{12}|} = \frac{-2\bar{a}_x + \bar{a}_y + 2\bar{a}_z}{\sqrt{9}}$$

$$F_1 = \frac{(20 \times 10^{-6})(-300 \cdot 10^{-6})}{4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)\sqrt{9}^2} \cdot \frac{-2\bar{a}_x + \bar{a}_y + 2\bar{a}_z}{\sqrt{9}}$$

$$= -6\left(\frac{-2\bar{a}_x + \bar{a}_y + 2\bar{a}_z}{3}\right) N = 6\left(\frac{2\bar{a}_x - \bar{a}_y - 2\bar{a}_z}{3}\right)$$

Kuvvetin büyüklüğü 6 N olup, yönü $q_1 \to q_2$ yönündedir (q_1, q_2 ye doğru çekilir)

Açıklamalar;
1) Vektörler koyu yazılarak üst çizgi kaldırılabilir.
2) Vektör farkı soldan - sağa doğru alınır.

Not Herhangi bir malzemenin dielektrik boşluğun geçirgenliği (ε_0) ile mukayesesi olarak verilir.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \text{ olur.}$$

Malzemeye ait

Elektrik alan

Uzayda bir noktadaki Elektrik Alan, o noktaya konulan artı bir deneme yüküne etkiyen F_e elektrik kuvvetinin deneme yükünün q_0 büyüklüğüne bölümü olarak tanımlanır.

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}_e}{q_0} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

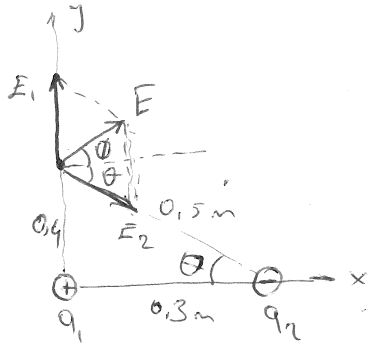
E, deneme yükünce oluşturulmayıp deneme yüküne dışarıdan etkiyen bir alandır. Ayrıca elektrik alanının varlığı, kaynağının bir özelliğidir. Örnek her elektronla birlikte kendi alanında vardır.

Yükler topluluğunun herhangi bir P noktasında oluşturduğu toplam elektrik alan, bütün yüklerin elektrik alanlarının vektörel toplamına eşittir.

$$\Sigma = k \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \bar{r}_i$$

Ö. İki yükün Elektrik alanı

Bir $q_1 = 7\,\mu C$ yükü başlangıç (orjin) noktasında, ikinci bir $q_2 = -5\,\mu C$ yükü x ekseni üzerinde orjinden 0,3m uzakta bulunmaktadır. (0, 0,4)m koordinatlı P noktasındaki elektrik alanını bulunuz.



Ç. $E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} = \cancel{8,99}\,9 \cdot 10^9 \cdot \frac{7 \cdot 10^{-6}}{(0,4)^2} = 3,9 \cdot 10^5\ N/C$

$E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{(0,5)^2} = 1,8 \cdot 10^5\ N/C$ $= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{25 \cdot 10^{-2}} = \frac{9}{5} \cdot 10^{11} \cdot 10^{-6} = 1,8 \cdot 10^5$

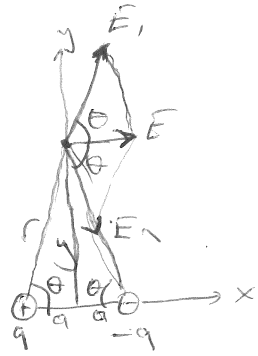
E_1 sadece y bileşenine sahiptir. $E_2 \Rightarrow E_2 \cdot \cos\theta = \frac{3}{5} E_2 \bar{a}_x$, $-E_2 \sin\theta = -\frac{4}{5} E_2 \bar{a}_y$

$E = E_1 + E_2 = 1,1 \cdot 10^5 \bar{a}_x + 2,5 \cdot 10^5 \bar{a}_y\ N/C$

$|\bar{E}| = \sqrt{(1,1 \cdot 10^5)^2 + (2,5 \cdot 10^5)^2} = 2,75 \cdot 10^5\ N/C$. $\varphi = 66°$

Ö. Bir dipolün Elektrik alanı

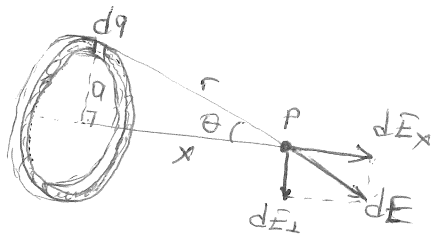
Bir elektrik dipolü, aralarında belli bir uzaklık bulunan artı ve eksi yük çiftinden oluşur. Şekildeki dipolün P noktasında bu yüklerin oluşturduğu E elektrik alanını bulunuz. P başlangıç noktasından $y >> a$ uzaklığındadır.

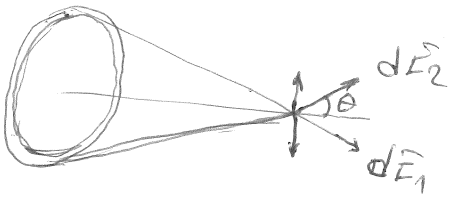


$E_1 = E_2$ $\quad E = E_1 + E_2$ $\quad E_1 = E_2 = k\frac{q}{r^2} = k\frac{q}{y^2 + a^2}$ E_1 ve E_2'nin y bileşenleri birbirini yok eder. x bileşenleri x yönünde olup birbirine eşittir. E x eksenine paralel olur. $2E_1 \cos\theta$ büyüklüğündedir.

Düzgün Yüklü Bir Halkanın Elektrik Alanı

a yarıçaplı bir halka üzerinde düzgün olarak dağılmış artı bir Q yükü bulunmaktadır. Halka ekseninde, halka merkezinden x uzaklığında bir P noktasında halkanın elektrik alanını hesaplayınız.





$dE = k\dfrac{dq}{r^2}$ Bu alanın dik bileşenleri birbirini sıfırlar. ⊥

Eksene paralel x bileşeni $dE_x = dE\cos\theta$, $r = (x^2+a^2)^{1/2}$ $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$$dE_x = dE\cos\theta = \left(k\frac{dq}{r^2}\right)\frac{x}{r} = \frac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}dq$$

Halkanın ~~P'ye uzak~~ bütün parçacıkları P'ye aynı oranda katkı sağlar.

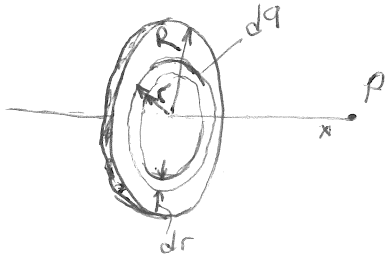
Buna göre $E_x = \displaystyle\int \frac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}dq = \frac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq = \frac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}Q$

$x=0$ da alan sıfırdır.

Düzgün Yük Dağılımlı bir Diskin Elektrik Alanı

$\sigma = \rho_s$ Peki $E = ?$

Disk aynı merkezli halkalar şeklinde düşünülür. Önceki örnekten yararlanarak bütün halkaların katkıları toplanabilir. Simetriden dolayı eksen üzerindeki bir noktada alan eksen boyunca olacaktır.



r yarıçaplı dr enli halkanın alanı $2\pi r\,dr$ dir. Yük $dq = 2\pi r\rho_s dr$

Yük halka alanı ile yüzey yük yoğunluğu çarpımına eşittir. $dq = 2\pi r\rho_s\,dr$

Önceki örnekte $E_x = \dfrac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}Q$ ⇒ $a=r$ alınırsa halkanın oluşturduğu alan

$dE = \dfrac{kx}{(x^2+r^2)^{3/2}}2\pi\rho_s r\,dr$ olur. x sabit alınır ve $r=0$ dan $r=R$ ye kadar integral alınır. $E = kx\pi\rho_s\displaystyle\int_0^R \frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = kx\pi\rho_s\int_0^R (x^2+r^2)^{-3/2}\,d(r^2)$

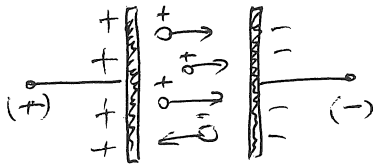
$$= kx\pi\rho_s\left[\frac{(x^2+r^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R = 2\pi k\rho_s\left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right) \text{ olur.}$$

$R \gg x$ olursa $E = 2\pi k\rho_s = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$ olur. $(\varepsilon_0 = 1/4\pi k)$

Noktasal Yüklerin Elektrik Alanları

Sabit bir A pozitif yükünün çevresinde aynı yük cinsine sahip bir B yükü (test yükü) dolaştırıldığında B yükü her noktada itilir. Bu olay A yükünün çevresinde B yükünü iten bir kuvvet vardır denilir.

İşte A cisminin meydana getirdiği etki sahasına Elektrik Alanı denir.



İki levha arasındaki yüklerin itilme hareketleri başlar. Bu hareketlerin sebebi aradaki elk. alandır.

Elek. Alanı: bir noktadaki elektrik alan şiddeti o noktadaki birim pozitif yüke etkiyen kuvvet olarak genişletilebilir.

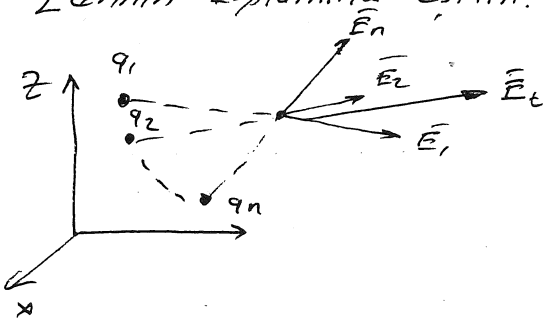
$$\bar{E} = \frac{F_t}{q_t} = \frac{q_k \cdot q_t}{4\pi\varepsilon R_{kt}^2} \Big/ q_t = \frac{q_k}{4\pi\varepsilon R_{kt}^2} \quad \frac{N}{C}$$ olarak bulunur.

q_t : test yükü
q_k = kaynak yükü

$$\bar{E} = \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 R_{kt}^2}\,\bar{a}_{kt}\,\frac{V}{m}$$ şeklinde yazılır ve uygulanır.

$$\frac{N}{C} = \frac{J/m}{C} = \frac{V \cdot C/m}{C} = \frac{V}{m}$$ bulunur

Eğer birden fazla yük uzayda dağılmış durumda iseler herhangi bir noktada oluşturacakları alan toplam elek. alanı olarak bilinir ve herbir yükün oluşturduğu elek. alan vektörlerinin toplamına eşittir.

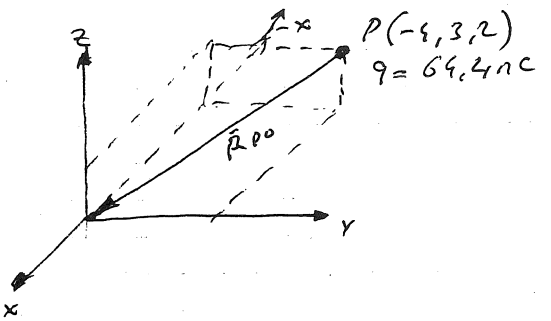


$$\bar{E}_t = \sum_{k=1}^{n} \bar{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k^2}\,\bar{a}_{R_k}\,\frac{V}{m}$$

$$\bar{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\,\bar{a}_{R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\,\bar{a}_{R_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 R_n^2}\,\bar{a}_{R_n}$$

Şeklinde yazılır.

Örnek 1 Orjindeki alanı P noktasındaki yüke göre bulunuz.



$$-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y + 2\bar{a}_x$$

$$\bar{R} = 4\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 2\bar{a}_z$$

$$|\bar{R}| = (4^2 - 3^2 - 2^2)^{1/2} = \sqrt{29}$$

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\bar{a}_R$$

$$\bar{a}_R = \frac{4\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 2\bar{a}_z}{\sqrt{29}}$$

$$\bar{E} = \frac{64{,}4\ 10^{-9}}{4\pi\,\frac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{29}^2}\cdot\bar{a}_R$$

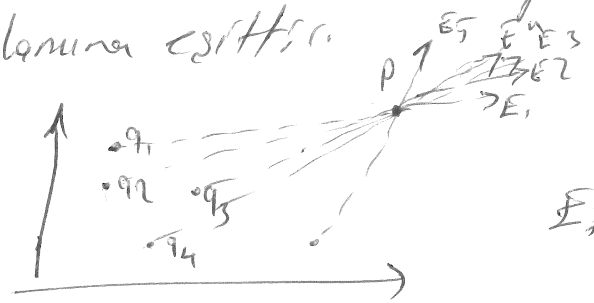
$$\bar{E} = \frac{64{,}4\ 10^{-9}}{4\pi\,\frac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{29}^2}\cdot\frac{4\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 2\bar{a}_z}{\sqrt{29}} = 20\left(\frac{4\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 2\bar{a}_z}{\sqrt{29}}\right)\frac{V}{m}$$

Noktasal Yüklerin Elektrik Alanı

Herhangi bir noktadaki Elektrik alanı o noktaya konulan + bir deneme yüküne etkiyen F elektrik kuvvetinin deneme yükünün q_t büyüklüğüne bölümü olarak tanımlanır

$$\bar{E} = \frac{F}{q_t} \left(\frac{N}{C}\right) \qquad \left(\frac{N}{C} = \frac{J/m}{C} = \frac{VC/m}{C} = V/m\right)$$

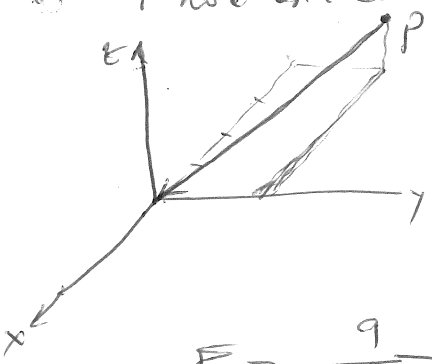
Yükler topluluğunun herhangi bir P noktasında oluşturduğu toplam elektrik alanı bütün yüklerin elektrik alan kısımlarının vektörel toplamına eşittir.



$$E_t = \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k^2} \bar{a}_{R_k} \left(\frac{V}{m}\right)$$

$$E_t = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\bar{a}_{R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\bar{a}_{R_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 R_n^2}\bar{a}_{R_n}$$

P noktasındaki yükün orijinde oluşturduğu alanı bulunuz.



$$a_R = \frac{4a_x - 3a_y - 2a_z}{\sqrt{29}}$$

$$\pm 4a_x \mp 3a_y \mp 2a_z$$

$$\cancel{\bar{R} = +4\bar{a}_x + 3a_y + 2a_z}$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}$$

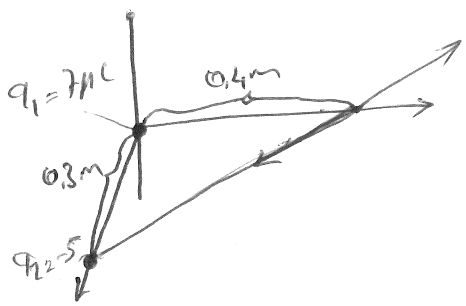
$$= 4\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 2\bar{a}_z \qquad |\bar{R}| = \sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \bar{a}_R = \frac{64.4 \cdot 10^{-9}}{4\pi \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{9} \sqrt{29}^2} \cdot \bar{a}_R = 20 \frac{4\bar{a}_x - 3\bar{a}_y - 2a_z}{\sqrt{29}} \left(\frac{V}{m}\right)$$

İki yükün elektrik alanı

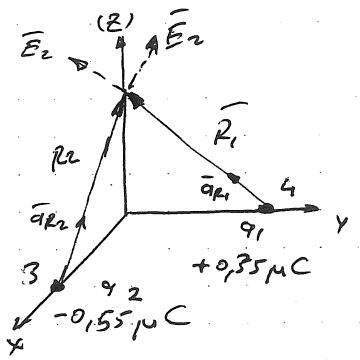
$q_1 = \cancel{0,35\mu C}$ $7\mu C$ yükü (0,0,0) $q_2 = -5\mu C$, (0,3,0,0) x ekseninde 0,3m'de

~~(0,0~~ P noktası Y ekseninde 0,4m'deki elektrik alanını bulunuz



$$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{R_1^2} \bar{a}_1 \qquad R_1 = 0{,}4\bar{a}_y \qquad \bar{a}_2 = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\cancel{0{,}4}}{\cancel{0{,}4}}\bar{a}_y$$

Örnek 2



$q_1 = 0{,}35\mu C$ ve $q_2 = -0{,}55\mu C$ ile ki yük belirtilen noktalarda bulunmaktadır. (0, 0, 5) metredeki elektrik alanını bulunuz.

$$\bar{R}_1 = -4\bar{a}_y + 5\bar{a}_z \Rightarrow |\bar{R}_1| = \sqrt{-4^2+5^2} = \sqrt{41}$$

$$\bar{R}_2 = -3\bar{a}_x + 5\bar{a}_z \Rightarrow |\bar{R}_2| = \sqrt{-3^2+5^2} = \sqrt{34}$$

$$\bar{a}_{R_1} = \frac{-4\bar{a}_y + 5\bar{a}_z}{\sqrt{41}}, \quad \bar{a}_{R_2} = \frac{-3\bar{a}_x + 5\bar{a}_z}{\sqrt{34}}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\bar{a}_{R_1} = \frac{0{,}35 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{41}^2} \cdot \frac{-4\bar{a}_y + 5\bar{a}_z}{\sqrt{41}}$$

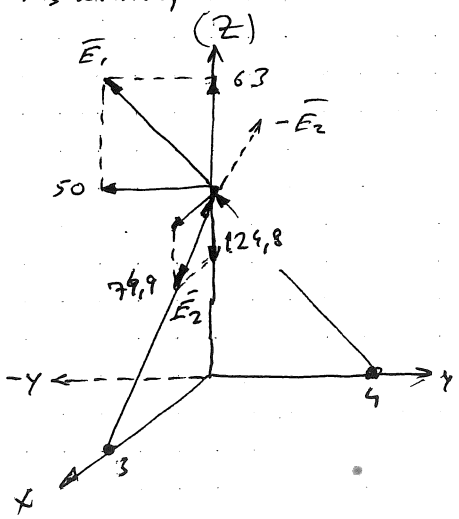
$$\bar{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\bar{a}_{R_2} = \frac{-0{,}55\,10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{34}^2} \cdot \frac{-3\bar{a}_x + 5\bar{a}_z}{\sqrt{34}}$$

$$\bar{E}_1 = -48\,\bar{a}_y + 60\,\bar{a}_z \frac{V}{m}, \quad \bar{E}_2 = 74{,}9\,\bar{a}_x - 124{,}9\,\bar{a}_z \frac{V}{m}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \Rightarrow -48\bar{a}_y + 74{,}9\,\bar{a}_x + (60 - 124{,}9)\bar{a}_z$$

$$\bar{E} = +74{,}9\,\bar{a}_x - 48\,\bar{a}_y - 64{,}9\,\bar{a}_z \frac{V}{m}$$ olarak bulunur.

Açıklama; Örnek vektörel olarak şekilden faydalanılarak



$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$ dir

$$\bar{E} = (+74{,}9)\bar{a}_x + (-50)\bar{a}_y + (+63 - 124{,}8)\bar{a}_z$$

$$\bar{E} = (74{,}9\,\bar{a}_x \simeq 50\,\bar{a}_y \simeq 61{,}8\,\bar{a}_z)\frac{V}{m}$$

şeklinde gösterilebilir.

Bilgi

Katı maddeler için "k" değerleri

Madde	$k\left(\frac{Nm^2}{C^2}\right)$	Madde	k
Boşluk	$9 \cdot 10^9$	Boryum	$1{,}2 \cdot 10^6$
Hava	$8{,}98 \cdot 10^9$	Teflon	$4{,}5 \cdot 10^9$
Bakalit	$1{,}285 \cdot 10^9$	Trafo yağı	$2{,}25 \cdot 10^9$
Porselen	$1{,}5 \cdot 10^9$	Titanyum	$1{,}2\ 10^6$
Cam	$1{,}5 \cdot 10^9$	Strontiyum	$1{,}2\ 10^6$
Mika	$1{,}8 \cdot 10^9$		
Kauçuk	$3 \cdot 10^9$		
Kağıt	$3{,}6 \cdot 10^9$		

$$E = 2 \cdot E_1 \cos\theta = 2k \frac{q}{(y^2+a^2)} \cdot \frac{a}{(y^2+a^2)^{1/2}} = k \frac{2qa}{(y^2+a^2)^{3/2}}$$

$y >> a$ için a^2 önesenmeyeceğinden $E \approx k \dfrac{2qa}{y^3}$ olur.

Sürekli bir yük dağılımının Elektrik alanı.

Bir birine yakın yüklerden oluşan bir sistem, bir çizgi, bir yüzey veya hacim üzerinde sürekli biçimde dağılmış toplam bir yüke eş değerdir.

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{r^2} \bar{r} \Rightarrow E \approx k \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \bar{r}_i$$

$$\Delta q_i \to 0 \Rightarrow E = k \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \bar{r}_i = k \int \frac{dq}{r^2} \bar{r}$$

Yükler düzgün dağılmamışsa

Hacimsel yük yoğunluğu $\rho_v = \dfrac{Q}{V} \ \dfrac{C}{m^3}$ $\qquad \rho_v = \dfrac{dQ}{dV}$

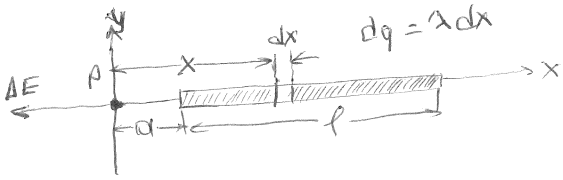
Yüzeysel yük yoğunluğu $\sigma = \rho_s = \dfrac{Q}{A} \left(\dfrac{C}{m^2}\right)$ $\qquad \rho_s = \dfrac{dQ}{dA}$

Doğrusal yük yoğunluğu $\lambda = \rho_l = \dfrac{Q}{l} \cdot \left(\dfrac{C}{m}\right)$ $\qquad \rho_l = \dfrac{dQ}{dl}$

Ö. Yüklü bir çubuğun Elektrik alanı

l uzunluktu bir çubuğun toplam yükü Q boyca yük yoğunluğu λ (ρ_l) dır.

Çubuk x ekseni üzerinde ve çubuğun d uzaklığında bir P noktasındaki elektrik alanını hesaplayınız.



Birim uzunluk başına yükü λ (ρ) olduğundan dx parçasındaki dq yükü $dq = \lambda dx$ (ρ) olur.

yük yoğunluğu

$$dE = k \frac{dq}{x^2} = k \lambda \frac{dx}{x^2} \quad (\rho)$$

Toplam elektrik alanı $E = \displaystyle\int_a^{l+a} k \lambda \frac{dx}{x^2}$ toplam yük $Q = \lambda l$ olmak üzere

$$E = k\lambda \int_a^{l+a} \frac{dx}{x^2} = k\lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{l+a} = k\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a}\right) = \frac{kQ}{a(l+a)}$$

$a >> l$ için l ihmal edilirse $E = \dfrac{kQ}{a^2}$ olur yani noktasal Q yükü gibi davranır.

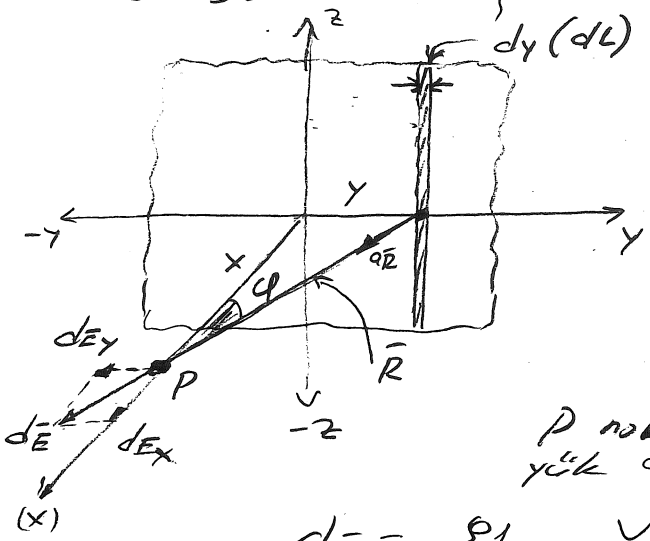
Yüzeysel yüklerde Elektrik Alanı

Paralel Levhalı kondansatörler için ve iletim hatlarında yüzeysel yük montajı kullanılır.

Bütün yüklerde yük dağılımı yüzeysel yük yoğunluğu şeklinde tanımlanır ve, ρ_s ile gösterilir.

$\rho_s = \frac{C}{m^2}$ ile ifade edilir

$Q_s = \rho_s \cdot S$ olur. { çünkü $C = \frac{C}{m^2} \cdot m^2 = C$ bulunur.



{ $\rho_L = \rho_s \cdot \underset{(dL)}{dy} = \frac{C}{m^2} \cdot m = \frac{C}{m}$

{ Şeklin simetrikliği ile sadece $d\bar{E}_x$ bileşeni vardır

{ $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\cot\varphi = \frac{y}{R}$

P noktasındaki elk alanı bir çizgisel yük ankamında benzerliği ile çözülür.

$d\bar{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon r} \frac{V}{m}$ şeklindeydi (Çizgisel yüklerde)

$$d\bar{E}_x = \frac{\rho_s \cdot dy}{2\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \bar{a}_R \quad \Big\{ \quad \bar{a}_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{x\bar{a}_x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$d\bar{E}_x = \frac{\rho_s \cdot dy}{2\pi\varepsilon (x^2+y^2)^{1/2}} \cdot \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} \bar{a}_x$$

$$d\bar{E}_x = \frac{\rho_s \cdot x \; dy}{2\pi\varepsilon (x^2+y^2)} \bar{a}_x$$

$$\bar{E}_x = \frac{\rho_s}{2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot dy}{x^2+y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}} 2 \cdot \Big|_{0}^{\infty} \tan^{-1}\frac{y}{x} \cdot \bar{a}_x$$

$$\bar{E}_x = \frac{\rho_s}{2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}} 2 \left(\tan^{-1}\frac{\infty}{x} - \tan^{-1}\frac{0}{x} \right) a_x$$

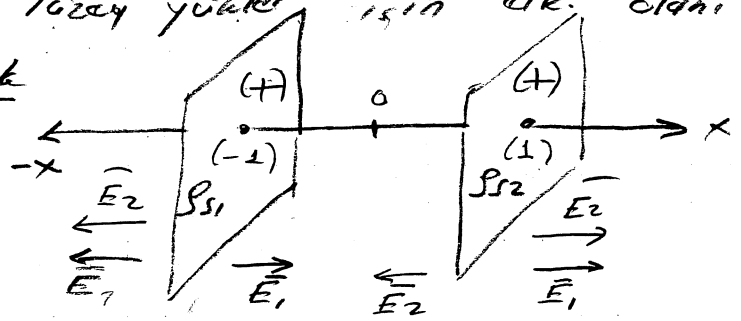
$$\bar{E}_x = \frac{\rho_s}{\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \bar{a}_x = \frac{\rho_s}{2\varepsilon} \bar{a}_x \text{ bulunur.}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \tan^{-1} x$$

$$\int \frac{1 \cdot dx}{1^2+x^2} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x}{1}$$

Yüzey yükler için elk. alanı örnekleri..

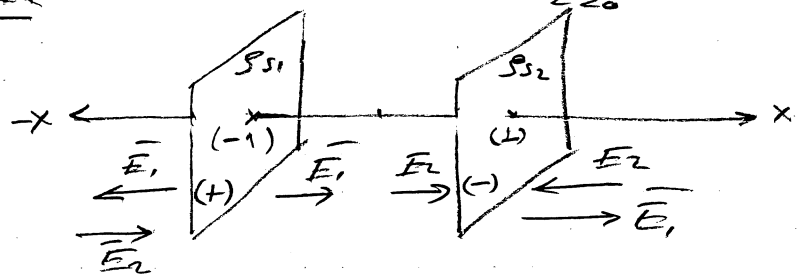
Örnek



İki aynı yükle yüklü iki paralel levha için elk alanını tüm bölgelerde tanımlayınız.

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \begin{cases} -2\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\,\bar{a}_x & x < -1 \text{ için} \\ 0 & -1 < x < 1 \text{ için} \\ 2\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\,\bar{a}_x & x > 1 \text{ için} \end{cases}$$

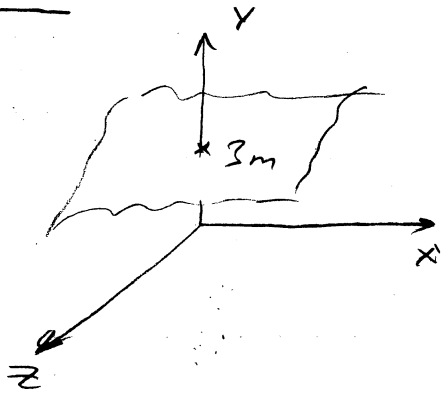
Örnek



İki farklı yüke sahip paralel levha için elk. alanını tüm bölgelerde tanımlayınız.

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ için} \\ 2\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} & -1 < x < 1 \text{ için} \\ 0 & x > 1 \text{ için} \end{cases}$$

Örnek



Şekildeki sonsuz levhada yüzey yük yoğunluğu;

$\rho_s = \left(1.10^{-8}/6\pi\right)\ \dfrac{C}{m^2}$ dir

Tüm bölgeler için elk alanını tanımlayınız.

a) $y > 3m$ ise

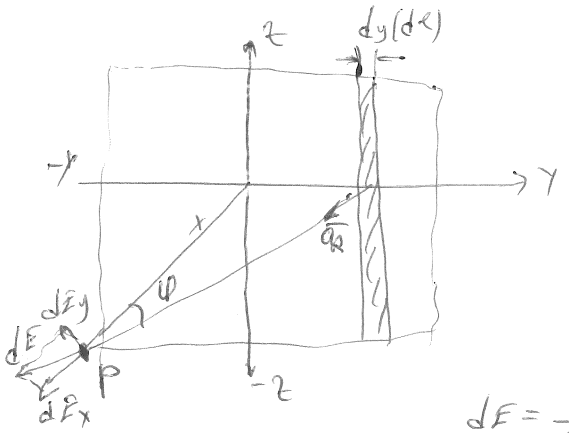
$$\bar{E} = \frac{1.10^{-8}/6\pi}{2.\dfrac{10^{-9}}{36\pi}} = 30\,\bar{a}_y\ \frac{V}{m}$$

b) $y < 3m$ ise

$$\bar{E} = -\frac{1.10^{-8}/6\pi}{2.\dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\ \bar{a}_y \text{ olur.}$$

Yüzeysel yüklerde elektrik alan

yük dağılımı $\rho_s = \frac{C}{m^2} = \frac{Q}{S}$ dir.



$$\rho_l = \rho_s \cdot dy = \frac{C}{m^2} \cdot m = \frac{C}{m}$$

$$R = (x^2+y^2)^{1/2} \qquad \cos\varphi = \frac{y}{R}$$

P noktasındaki elektrik alanı bir çizgisel yük ortamındaki benzerliği ile çözülür.

$$dE = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r} \text{ V/m}$$ çizgisel yüklerde idi.

$$d\bar{E}_x = \frac{\rho_s\, dy}{2\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}}\,\bar{a}_R \qquad \Big|\ \bar{a}_R = \frac{\bar{R}}{|R|} = \frac{x\,a_x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$d\bar{E}_x = \frac{\rho_s\, dy}{2\pi\varepsilon\,(x^2+y^2)^{1/2}} \cdot \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, a_x = \frac{\rho_s\, x\, dy}{2\pi\varepsilon\,(x^2+y^2)}\,\bar{a}_x$$

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}} \cdot 2 \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^{\infty} \bar{a}_x$$

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}}\, 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\infty}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0}{x}\right)\right)\bar{a}_x$$

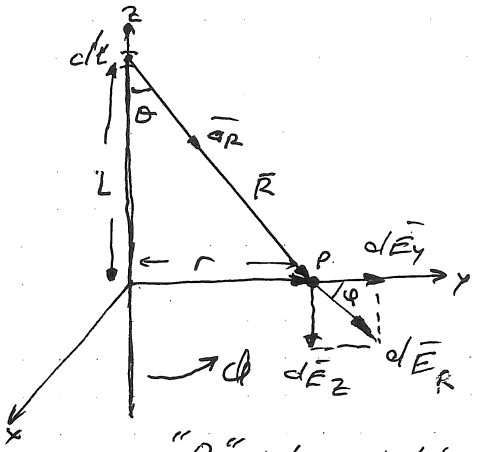
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$E_x = \frac{\rho_s}{\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\bar{a}_x = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\,\bar{a}_x$$

Çizgisel yüklerde "Elektrik Alanı"

Bir iletken tel yük taşıyor olsun kalınlığı ihmal edilerek, birim uzunluk başına taşınan yük çizgisel yük olarak bilinir.

Çizgisel yüklerde yük yoğunluğu ($\rho_L = \frac{C}{m}$) olarak tanımlanır ve örnek olarak katot tüplerindeki birim yaydığı yük çizgisel yüke örnek olarak verilebilir.



Şekildeki z ekseni boyunca +∞ ile −∞ arasında bulunan çizgisel taşıyıcının yük yoğunluğu ρ_L ise P noktasında oluşturacağı alanı görülmektedir.

Oluşacak alan çevreseldir ve eş yarıçaplarda alan şiddeti sabittir.

Not "r" arttıkça alan azalır ve sonsuzda sıfır olur.

"P" noktasındaki alanın tespiti için olay noktasal olarak yaklaşılır ve tüm iletken boyunca olan etkisi P noktası için integre edilerek (toplanarak) bulunur.

Açıklama; görülüyorki $d\bar{E}_z$'nin "−" simetrisi olacağından sadece $d\bar{E}_y$ ler dikkate alınarak P noktasının alanı bulunur. Yani alanın sadece r'ye bağlı bileşeni vardır.

$\bar{R}$ vektörü; $(0, y, 0) - (0, 0, z) \Rightarrow \bar{R} = \bar{a}_y - \bar{a}_z$ olur.

{ $\bar{a}_z$ ihmal edilir (nedeni üstte açıklandı)

$\vec{R} = \bar{a}_y$ dir.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$|\bar{R}|$ vektörün şiddeti $= \sqrt{y^2+z^2}$ olur.

$\bar{a}_R$ Birim vektör $= \frac{\bar{a}_y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{r}{R}$ olarak yazılabilir.

$$d\bar{E}_r = \frac{\rho_L \cdot dL}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \bar{a}_R = \frac{\rho_L \cdot dL}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{r}{R} = \frac{\rho_L \cdot dL \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad \Big\} \rho_L \cdot dL = \frac{C}{m} \cdot m = C$$

$$d_{E_r} = \frac{\rho_L \cdot dL \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2+L^2}^{3/2}}$$ olur. ve her iki tarafın integrali alınırsa,

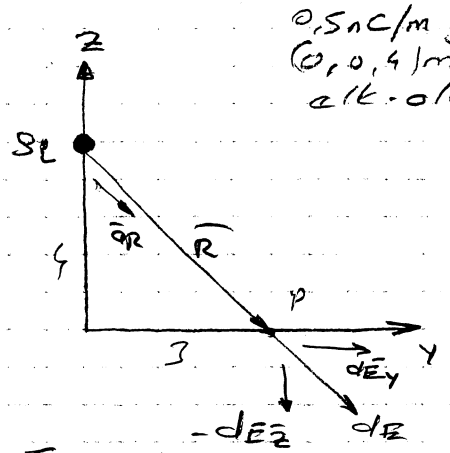
$$\bar{E}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L r\, dL}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2+L^2}^{3/2}} \quad \Bigg| \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \cdot r\, dL}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2+L^2}^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} 2 \int_0^{\infty} \frac{r\, dL}{\sqrt{r^2+L^2}^{3/2}}$$

$$\bar{E}_r = \frac{\rho_L \cdot r}{4\pi\varepsilon_0} 2 \int_0^{\infty} \frac{dL}{\sqrt{r^2+L^2}^{3/2}} \bar{a}_y \Rightarrow \bar{E}_r = \frac{\rho_L \cdot r}{4\pi\varepsilon_0} 2 \Big| \frac{L}{r^2 (r^2+L^2)^{1/2}} \bar{a}_y \text{ olur.}$$

$$\bar{E}_r = \frac{\rho_L \cdot r\, 2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(\frac{L}{\sqrt{L^2}} - \frac{0}{0} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r} \bar{a}_y \Big\}$$ sonsuzun yanında "r" ihmal edilebilir

olan sonuç

Örnek: Sonsuz uzunlukta 0,5nC/m yüke yoğunlukla bir çizgisel yük (0,0,4)m de bulunuyor. (0,3,0)m deki elk. alanını tanımlayınız.



$$\bar{R} = y\bar{a}_y - z\bar{a}_z$$

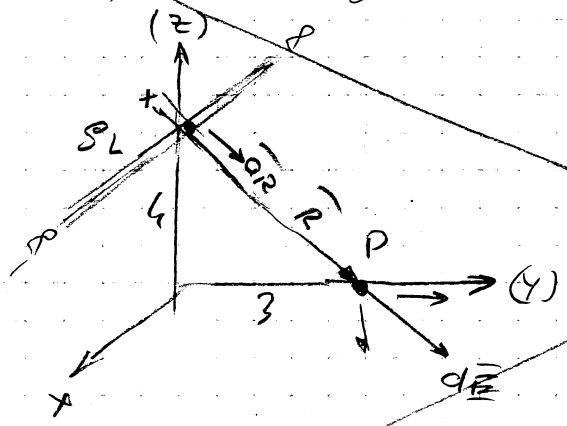
$$|\bar{R}| = (y^2 - z^2)^{1/2}$$

$$\bar{a}_R = \frac{y\bar{a}_y - z\bar{a}_z}{(y^2 - z^2)^{1/2}} = \frac{3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z}{5}$$

a) $\bar{E}_L = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon r}\bar{a}_R$ formülü yardımı ile çözüm.

$$\bar{E}_L = \frac{0{,}5\cdot 10^{-9}}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\,5}\cdot\frac{3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z}{5} = 1{,}08\,\bar{a}_y - 1{,}44\,\bar{a}_z\ \frac{V}{m}$$

b) Noktasal yüklerdeki elk. alanı yaklaşımını kullanarak



$$d\bar{E} = \frac{(\rho_L\cdot dL)}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\,\bar{R}^2}\bar{a}_R$$

dL yerine dx olur

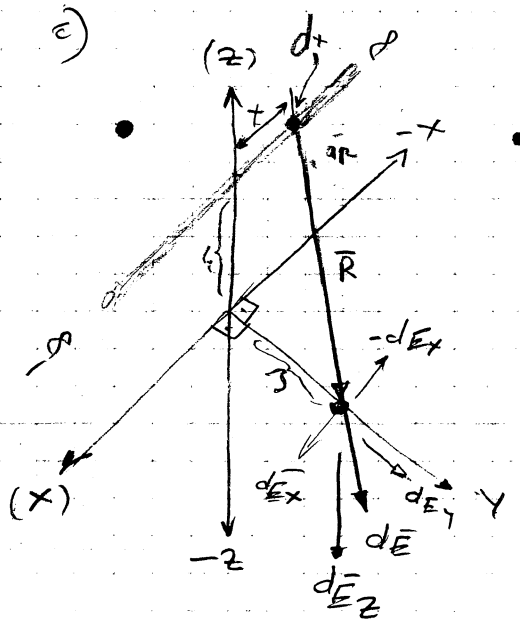
$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\,2\int_0^{\infty}\frac{dx}{(y^2 - z^2)^{3/2}}\,(3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z)$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{2}{(3^2 + 4^2)}\Big|_0^{\infty} x\,\frac{(3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z)}{5}$$

$$\bar{E} = \frac{0{,}5\cdot 10^{-9}}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}}\cdot\frac{2}{(25)}\Big|_0^{\infty} x\,\frac{(3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z)}{5}$$

Sonuç belirsizleşiyor

c)



$$\bar{R} = \begin{matrix} 0 & y & 0 \\ -x & 0 & z \end{matrix}$$

$$x\bar{a}_x + y\bar{a}_y - z\bar{a}_z \Rightarrow |\bar{R}| = \left(x^2 + \overbrace{(3^2 + 4^2)}^{A^2}\right)^{1/2}$$

$$|\bar{R}| = (A^2 + x^2)^{1/2}$$

$$\bar{a}_R = \frac{3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z}{(A^2 + x^2)^{1/2}} \qquad A = \sqrt{25} = 5 \text{ olur.}$$

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_L\,dL}{4\pi\varepsilon\,R^2}\bar{a}_R = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\,2\int_0^{\infty}\frac{dx\,(3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z)}{(A^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\,\frac{2}{A^2}\Big|_0^{\infty}\frac{x}{(A^2 + x^2)^{1/2}}\,(3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z)$$

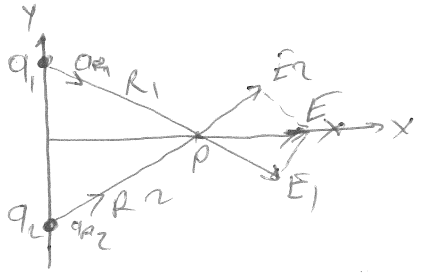
$$\bar{E} = \frac{0{,}5\cdot 10^{-9}}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}}\cdot\frac{2}{25}\underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right)}_{1}(3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z)$$

$$\bar{E} = (1{,}08\,\bar{a}_y - 1{,}44\,\bar{a}_z)\ \frac{V}{m} \text{ bulunur.}$$

$\left\{ d\bar{E}_x \right.$ ler birbirlerini yok ederler

ö $\rho_\ell = 4\,nC/m$ lik iki Y-Z düzleminde $y = \mp 4$ m de bulunmaktadır. Düzgün yük dağılımlı bu iki çizgisel yükün (4, 0, 0) m'deki elektrik alanını bulunuz.

$$E_1 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}\, a_{R_1} = \frac{4\cdot 10^{-9}}{2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{4^2+4^2}}\, \bar{a}_{R_1} = 12.72\, \bar{a}_{R_1}$$



$E_1 = E_2$

iki yükün sadece x bileşeni dikkate alınır. y bileşenleri birbirini yok eder.

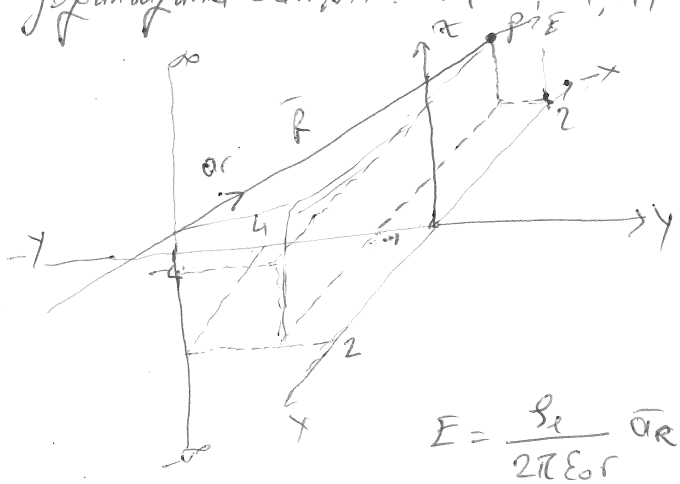
Birim vektörler: $\bar{a}_{R_1} = \frac{R_1}{|R_1|} = \frac{4\bar{a}_x - 4\bar{a}_y}{\sqrt{32}}$

$\bar{a}_{R_2} = \frac{R_2}{|R_2|} = \frac{4a_x + 4a_y}{\sqrt{32}}$

$\bar{a}_y$ ler birbirini götürür.

$$E = E_1 + E_2 = \frac{18}{\sqrt{2}}\,\frac{4a_x}{\sqrt{32}} + \frac{18}{\sqrt{2}}\,\frac{4a_x}{\sqrt{32}} = 9\bar{a}_x + 9\bar{a}_x = 18\bar{a}_x \left(\frac{V}{m}\right)$$

ö $X = 2$ m, $Y = -4$ m den geçen sonsuz bir çubuk 20 nC/m'lik yük yoğunluğuna sahiptir. P(−2, −1, 4) m'deki elektrik alanını bulunuz.



$$R = \begin{matrix} -2 & -1 & 4 \\ \mp 2 & \pm 4 & \mp 4 \end{matrix}$$

$$-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y$$

$$R = \sqrt{-4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\bar{a}_R = \frac{-4a_x + 3a_y}{5}$$

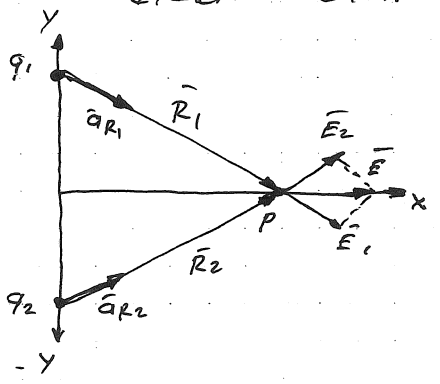
$$E = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\bar{a}_R$$

$$E = \frac{20\cdot 10^{-9}}{2\pi\,\frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot 5}\,\frac{-4a_x + 3a_y}{5} = -57{,}6\,\bar{a}_x + 43{,}2\,\bar{a}_y \ V/m$$

Görüldüğü gibi elektrik alanının z bileşeni yoktur.

Çizgisel yük ornekleri

Örnek 1 $\rho_L = 4\,nC/m$'lik iki y-z düzleminde $y=\mp 4m$ de bulunuyorlar. Düzgün yük dağılımlı, bu iki çizgisel yükün $(4,0,0)m$ deki elektrik alanını bulunuz.



$$\bar{E}_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\bar{a}_{R_1} = \frac{4\cdot 10^{-9}}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{4^2+4^2}}\bar{a}_{R_1}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{18}{\sqrt{2}}\bar{a}_{R_1}\ \frac{V}{m} = 12{,}72\,\bar{a}_{R_1}\ \frac{V}{m}$$

$\bar{E}_1 = \bar{E}_2$ dir.

Not, iki yükün sadece x bileşenleri dikkate alınır y bileşenleri birbirini yok eder.

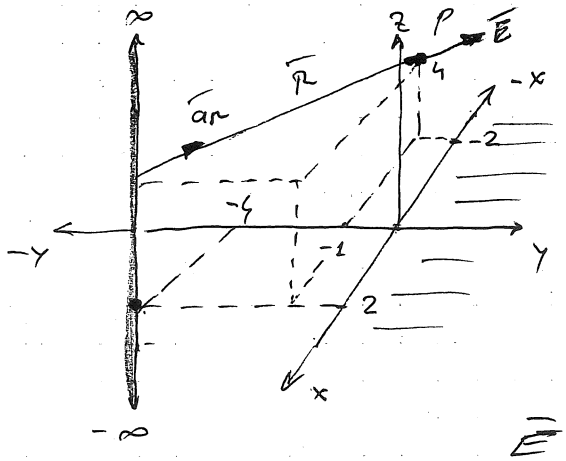
Birim vektörler; $\bar{a}_{R_1} = \dfrac{\bar{R}_1}{|\bar{R}_1|} = \dfrac{4\bar{a}_x - 4\bar{a}_y}{\sqrt{32}}$

$a_{R_2} = \dfrac{\bar{R}_2}{|\bar{R}_2|} = \dfrac{4\bar{a}_x + 4\bar{a}_y}{\sqrt{32}}$ } $\bar{a}_y$'lar birbirlerini götürür.

$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$ dir

$$\bar{E}_1 = \left(\frac{18}{\sqrt{2}}\ \frac{4\bar{a}_x}{\sqrt{32}}\right) + \left(\frac{18}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\bar{a}_x}{\sqrt{32}}\right) = (9\bar{a}_x) + (9a_x) = 18\bar{a}_x\ \frac{V}{m}$$

Örnek 2 $x = 2m$, $y = -4m$ dan geçen sonsuz bir çubuk $20\,nC/m$'lik yük yoğunluğuna sahiptir. $P(-2,-1,4)m$ deki elektrik alanını yorumlayınız.



$\bar{R}$ vektörü $-2\ -1\ 4$
$\mp 2 \pm 4 \mp 4$

$\bar{R} = -4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y$ olarak bulunur.

$$|\bar{R}| = \sqrt{-4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

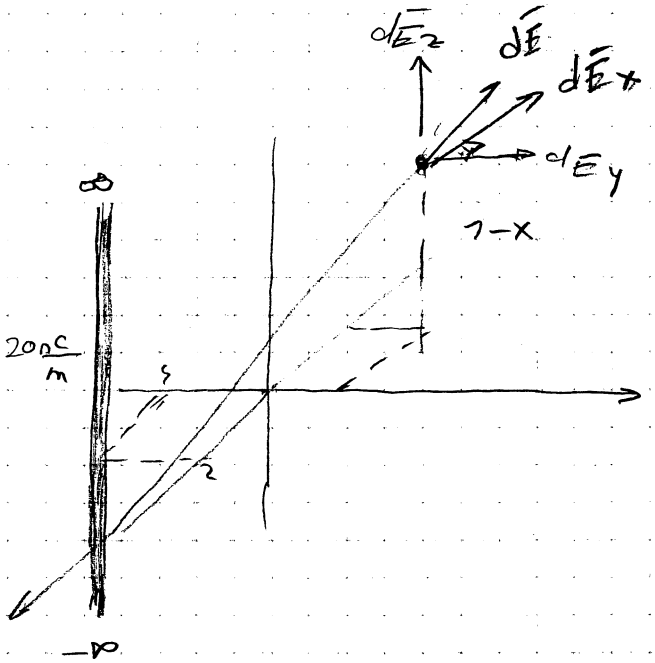
$$\bar{a}_R = \frac{-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y}{5}$$

$\bar{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\bar{a}_R$ ifadesi kullanılarak

$$\bar{E} = \frac{20\cdot 10^{-9}}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot 5}\cdot\frac{-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y}{5} = -57{,}6\,\bar{a}_x + 43{,}2\,\bar{a}_y\ \frac{V}{m}$$

olarak bulunur. Görülüyor ki elektrik alanının z bileşeni yoktur.

aşınım arkada



dE_z ler birbirlerini yokeder

$$\bar{R} = -4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y + (4-z)\bar{a}_z$$

$$|\bar{R}| = \left(4^2 + 3^2 + (4-z)^2\right)^{1/2}$$

$$d\bar{E} = \frac{\rho_L\, dz}{4\pi\varepsilon R^2}\,\bar{a}_R \quad \Big|\; A = \sqrt{25} = 5$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\, 2\int_0^\infty \frac{dz\,(-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y)}{\left(\underbrace{(4^2+3^2)}_{A^2} + (4-z)^2\right)^{3/2}}$$

$$\bar{E} = \frac{20\cdot 10^{-9}}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}}\, 2\int_0^\infty \frac{z\,(-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y)}{(A)^2\left(A^2 + (4-z)^2\right)^{1/2}}$$

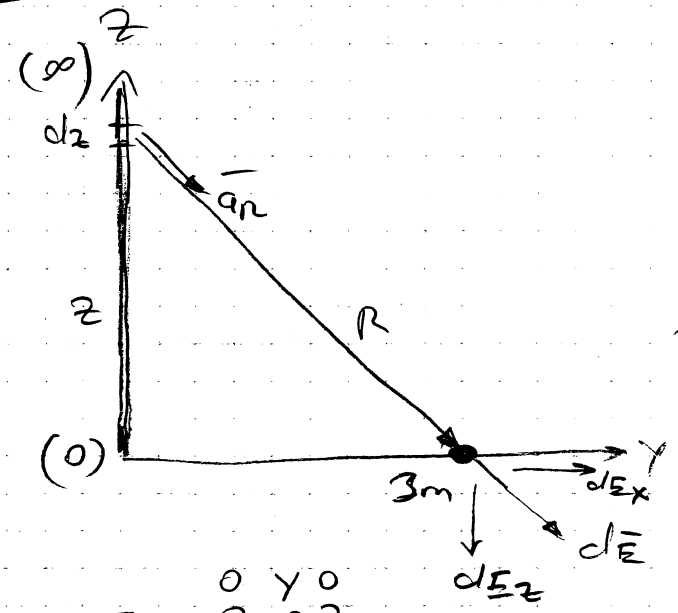
$$\bar{E} = \frac{20\cdot 9\cdot 2}{A^2}\int_0^\infty \frac{z}{(4-z)}\,(-4a_x + 3\bar{a}_y)$$

z'in yanında 4 ihmal edilirse,

$$\bar{E} = \frac{20\cdot 9\cdot 2}{25}\cdot 1\,(-4\bar{a}_x + 3\bar{a}_y)$$

$$\bar{E} = -57{,}6\,\bar{a}_x + 43{,}2\,\bar{a}_y \ \frac{V}{m}$$

<u>Örnek</u>



$$d\bar{E} = \frac{\rho_L\, dz}{4\pi\varepsilon R^2}\,\bar{a}_R$$

$$= \frac{\rho_L\, dz}{4\pi\varepsilon (y^2+z^2)^2}\cdot\frac{y\bar{a}_y - z\bar{a}_z}{(y^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\int d\bar{E} = \int_0^\infty \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}\,(y\bar{a}_y - z\bar{a}_z)$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\left\{\int_0^\infty \frac{dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}\,y\bar{a}_y - \int_0^\infty \frac{dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}\,z\bar{a}_z\right.$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{y}{y^2}\Big|_0^\infty \frac{z\,\bar{a}_y}{(y^2+z^2)^{1/2}} - \int_0^\infty \frac{dz\,z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\,\bar{a}_z\right.$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon y}\,(\bar{a}_y - \bar{a}_z)$$

$$\bar{R} = \begin{matrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{matrix}$$

$$y\bar{a}_y - z\bar{a}_z$$

$$|\bar{R}| = \left(y^2 + z^2\right)^{1/2}$$

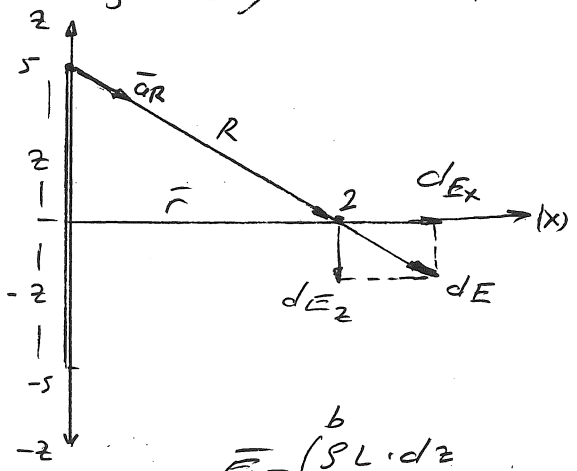
$$\bar{a}_R = \frac{y\bar{a}_y - z\bar{a}_z}{(y^2+z^2)^{1/2}}$$

Eğer sonsuzdan sonsuza alsaydı

$\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon y}\,a_y$ olacaktı

Dolayısıyla sonuç 2'ye bölünmüşdür.

Örnek3 Çizgisel bir yük z ekseninde ±5 m de olup düzgün bir dağılımdadır. 20 nC/m yük yoğunluğuna sahip bu çizgisel yükün (2,0,0) m deki elektrik alanını bulunuz.



$$\begin{array}{r} 200 \\ 005 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{R} = 2\bar{a}_x - 5\bar{a}_z \quad (r\bar{a}_x - z\bar{a}_z)$$

$$|\bar{R}| = (r^2+z^2)^{1/2}$$

$$\bar{a}_R = \frac{r\bar{a}_x - z\bar{a}_z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

$$d\bar{E} = \frac{\rho_L \cdot dL}{4\pi\varepsilon R}\cdot\bar{a}_R \Rightarrow \bar{E} = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\varepsilon R}\cdot\bar{a}_R$$

$$\bar{E} = \int_a^b \frac{\rho_L \cdot dz}{4\pi\varepsilon\left((r^2+z^2)^{1/2}\right)^2}\cdot\frac{r\bar{a}_x - \cancel{z\bar{a}_z}}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

$\bar{a}_z$, simetrikliklerden dolayı yok olur.

$$\bar{E} = \int_a^b \frac{\rho_L \cdot dz\, r}{4\pi\varepsilon\,(r^2+z^2)^{3/2}}\cdot\bar{a}_x \quad \frac{20\,10^{-9}\cdot r}{4\pi\,\frac{10^{-9}}{36\pi}}\int_{-5}^{5}\frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\bar{a}_x$$

$$\bar{E} = \frac{20\cdot10^{-9}\cdot r}{4\pi\,\frac{10^{-9}}{36\pi}}\int_{-5}^{5}\frac{z}{r^2\,(r^2+z^2)^{1/2}}\cdot\bar{a}_x \qquad \left\{\int\frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2}\int\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right.$$

$$E = \frac{20\cdot10^{-9}\cdot r}{4\pi\,\frac{10^{-9}}{36\pi}\,r^2}\int_{-5}^{5}\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\,\bar{a}_x \quad \frac{180}{r}\left(\frac{+5}{(2^2+5^2)^{1/2}} - \frac{-5}{(2^2-5^2)^{1/2}}\right)\bar{a}_x$$

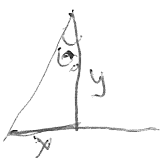
$$E = \frac{180}{2}\cdot\left(\frac{5}{29} - \frac{-5}{29}\right)\bar{a}_x = 90\cdot(0{,}928 + 0{,}928)\,\bar{a}_x = 167\,\bar{a}_x\ \frac{V}{m}$$

Örnek4: Önceki örnekte verilen çizgisel yük +5 ile +∞ ve -5 ile -∞ arasında ise sorucu yorumlayınız.

$$\bar{E} = \frac{180}{2}\left[\int_5^{\infty}\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \int_{-\infty}^{-5}\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]\bar{a}_x \text{ olur.}$$

$$\bar{E} = 90\left(\left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + \left(\frac{-5}{\sqrt{29}} - \frac{-z}{\sqrt{z^2}}\right)\right)\bar{a}_x$$

$$\bar{E} = 90\,(1 - 0{,}928) + (-0{,}928 + 1) = 12{,}8\,\bar{a}_x\ \frac{V}{m}$$

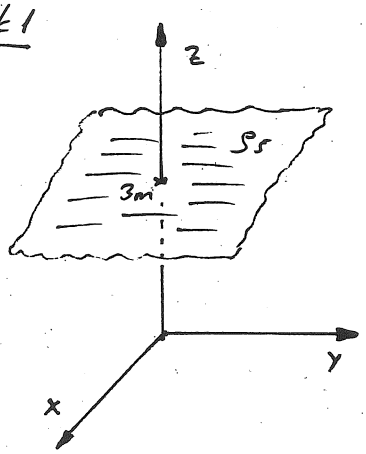


$x = y\tan\theta$

$dx = y\sec^2\theta\, d\theta$

Yüzaysel yük taşıyıcılarla ilgili örnekler

Örnek 1



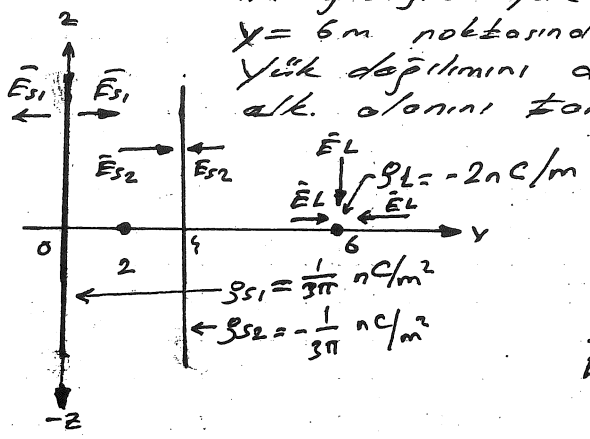
Şekildeki levhanın yük dağılımı düzgün olup yük yoğunluğu $10^{-8}/6\pi \ \frac{C}{m^2}$ dir. $\bar{E}$ değerini tüm bölgeler için tanımla.

a) $z > 3m$ için, $\bar{E} = \dfrac{10^{-8}/6\pi}{2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \cdot \bar{a}_z = 30\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$

b) $z < 3m$ için, $E = (\downarrow) \cdot \bar{a}_z = -30\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$

Örnek 2

$y=0$ ve $y=4m$ noktalarından geçen z eksenine paralel iki yüzaysel yük bulunuyor. 3. bir yük ise çizgisel olup $y=6m$ noktasından x eksenine paralel geçmektedir. Yük dağılımını düzgün alarak $y=2m$ deki toplam elk. alanını tanımlayınız.



$\bar{E}_t = \bar{E}_{s1} + \bar{E}_{s2} + \bar{E}_L$ olur.

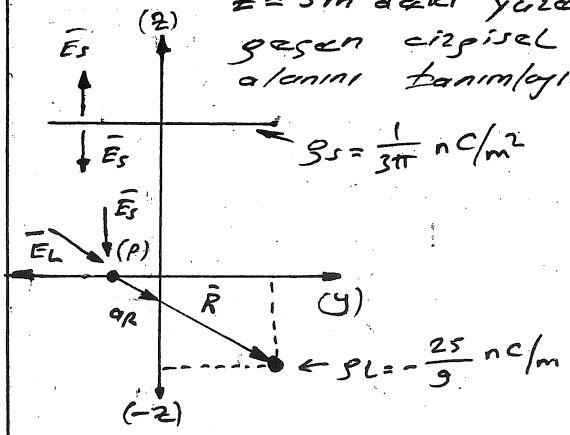
$$\bar{E}_t = \frac{\rho_{s1}}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_{s2}}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\bar{E}_t = \frac{(1/3\pi)\cdot 10^{-9}}{2\cdot\frac{10^{-9}}{36\pi}}\cdot\bar{a}_y + \frac{(1/3\pi)\cdot 10^{-9}}{2\cdot\frac{10^{-9}}{36\pi}}\cdot\bar{a}_y + \frac{2\cdot 10^{-9}}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\,4}\cdot\bar{a}_y$$

$\bar{E}_t = 6\bar{a}_y + 6\bar{a}_y + 9\bar{a}_y \Rightarrow \bar{E}_t = 21\bar{a}_y \ \frac{V}{m}$ bulunur.

Örnek 3

$z=5m$'deki yüzaysel yük ile, $z=-3m$ ile $y=3m$ den geçen çizgisel yükün $P(0,-1,0)$ noktasındaki toplam elk. alanını tanımlayınız.



$$\bar{R} = \begin{matrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \qquad \bar{a}_R = \frac{4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z}{(4^2+3^2)^{1/2}}$$

$$\bar{E}_s = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\bar{a}_z = \frac{(1/3\pi)\cdot 10^{-9}}{2\cdot\frac{10^{-9}}{36\pi}}\cdot(-\bar{a}_z) = -6\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$$

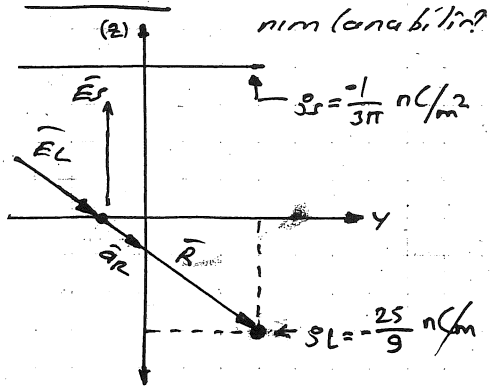
$$\bar{E}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\bar{a}_R = \frac{(25/9)\cdot 10^{-9}}{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\,5}\cdot 4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z$$

$$\bar{E}_L = \frac{10}{2}(4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z) = 8\bar{a}_y - 6\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$$

$\bar{E}_t = \bar{E}_L + \bar{E}_s = -6\bar{a}_z + 8\bar{a}_y - 6\bar{a}_z = 8\bar{a}_y - 12\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$ bulunur.

Örnek 4

Örnek 3 deki $\rho_s = -\frac{1}{3\pi} nC/m^2$ olursa, alan nasıl tanımlanabilir?



$\bar{R} = 4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z$

$\bar{E}_s = 6\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$

$\bar{E}_L = 8\bar{a}_y - 6\bar{a}_z \ \frac{V}{m}$

$\bar{E} = \bar{E}_s + \bar{E}_L = 6\bar{a}_z + (8\bar{a}_y - 6\bar{a}_z) = 8\bar{a}_y \ \frac{V}{m}$

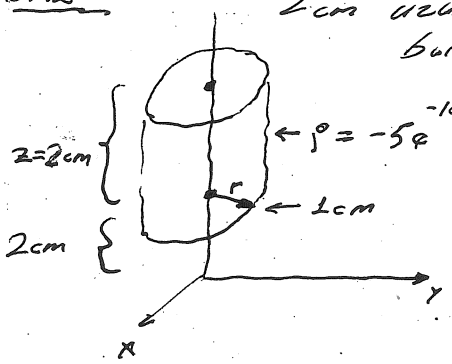
Hacimsel Yük Dağılımının Elektrik Alanı

Yükler bir hacim içerisinde dağılmışlarsa, ρ_v (C/m³) hacimsel yük yoğunluğu sözkonusu olur. Örneğin elektron tabancasındaki katot ve ekran grid aralığı gibi yerler için hacimsel yüklerden bahsedebiliriz.

Bir Q yükü hacimsel olsun,

$Q_v = \int_v dq = \int_v \rho\, dv$ şeklinde ifade edilir. $\left\{ \rho_v = \frac{dQ}{dv} \; C/m^3 \right.$

Örnek 1 2 cm uzunluğundaki elekt. hüzmesinin toplam yükünü bulunuz.



$\rho = -5e^{-10^5 r z}\ \mu C/m^3 \quad = \rho_v = -5.10^{-6} e^{-10^5 r z}\ (C/m^3)$ olur.

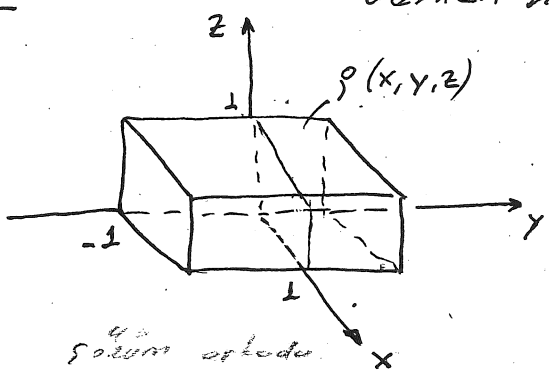
$$Q_v = \int_{0,02}^{0,09}\int_0^{2\pi}\int_0^{0,01} -5.10^{-6}.e^{-10^5 r z}\, r.dr d\varphi.dz$$

$$= \int_0^{0,01} -10^{-10}\pi\left(e^{-2000r} - e^{-4000r}\right)dr$$

$Q_v = \frac{-\pi}{40}$ (pC) bulunur.

İçten çözülmüş çözülecek.

Örnek 2 $0 \le x \le 1m$, $0 \le y \le 1m$ ve $0 \le z \le 1m$ olarak verilen hacimde $\rho_v = 30x^2y$ ($\mu C/m^3$) olan hacimsel yükü bulunuz.



Şekilde görülmüş

a) $dq = \rho_v dv$

$$q = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 30x^2y\, dx.dy.dz$$

$= 5\mu C$

b) $-1 \le y \le 0$ m de yük

$$q = \int_0^1\int_{-1}^0\int_0^1 30x^2y\, dx dy dz$$

$= -5\mu C$

Elektrik Akısı

Elektrik alan büyüklüğü E ile alana dik A yüzölçümünün çarpımına Φ elektrik akısı denir.

$$\Phi_E = EA \left(\frac{Nm^2}{C}\right)$$

Ö Bir küreden geçen akı

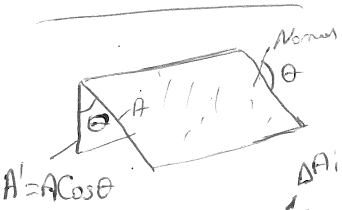
Merkezinde $1\mu C$'luk bir yük bulunduran 1m yarıçaplı bir küreden geçen elektrik akısı ne kadardır?

Ç. Bu yükten 1m uzaklıkta elektrik alanının büyüklüğü

$$E = k\frac{q}{r^2} = 9.10^9 \frac{1.10^{-6}}{1^2} = 9.10^3 \ N/C$$

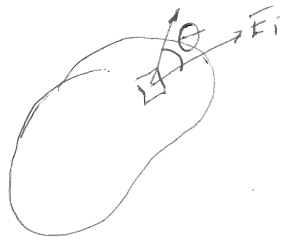
Alan yarıçapsal (radyal) olarak dışarıya yönelik olup bu nedenle her yerde küre yüzeyine diktir. Böylece küreden ($A = 4\pi r^2 = 12,6 m^2$) geçen akı

$$\Phi_E = EA = 9.10^3 . 12,6 = 1,13.10^5$$



A' ve A dan geçen akı aynı olduğundan A dan geçen akı

$$\Phi = EA' = EA\cos\theta$$



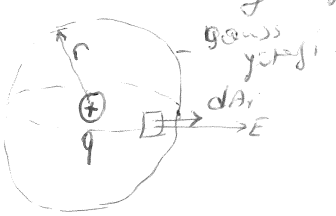
Genel bir yüzeyin çok sayıda ΔA alanlı yüzeyleri için.

$$\Delta\Phi = E_i \Delta A_i \cos\theta = E_i . \Delta A_i$$

$$\Phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum E_i . \Delta A_i = \oint_{yüzey} E_i . dA$$

Gauss Yasası

Gauss yasası kapalı bir yüzeyden geçen net elektrik akısıyla, yüzey tarafından sarılan yük arasındaki bağıntıyı tanımlar



Küre ortasında +q yükü bulunsun. Küre üzerinde her noktadan Elektrik alanı $E = k\frac{q}{r^2}$ dir. $\Delta A_i // E$ olduğundan.

Skaler çarpım $\vec{E}.\vec{\Delta A_i} = E\Delta A_i \frac{1}{\cos 0}$ olur.

Küre için E sabit olduğundan.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \int E.dA = E\oint dA \text{ olur.}$$

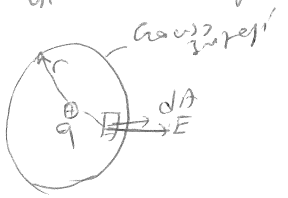
$\oint dA = A = 4\pi r^2$ dir. $\Phi_E = \frac{kq}{r^2} . 4\pi r^2 = 4\pi k q \Rightarrow k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$ olur.

Gauss Yasasına göre herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı

$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{ic}}{\varepsilon_0}$ olur. q_{ic} = yüzey içindeki net yük'tür.

$\boxed{dA = dS}$

Ö: Bir Noktasal yükün Elektrik Alanı.



$$\Phi_E = \oint \vec{E}\,d\vec{A} = \int E\,dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Simetri

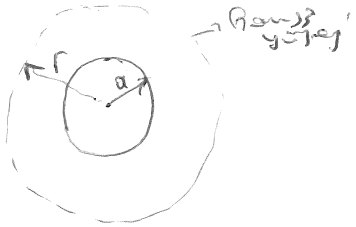
1- $\vec{E}$'nin büyüklüğü yüzey üzerinde sabit olabilir.
2- $\vec{E}\,d\vec{A}$ skaler çarpımı $E \parallel dA$ ise dolayı $E.A$ olarak belirtilebilir.
3- $\vec{E} \perp d\vec{A}$ dik olduklarında $E.dA = 0$ olur.
4- Yüzey üzerinde elektrik alanı sıfır olabilir.

Simetriye göre E her yerde sabit ve yüzeye dik'tir. Bunu göre

$$\oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{q}{r^2} \text{ olur.}$$

Ö: Küresel simetrili bir yük dağılımı

a yarıçaplı yalıtkan olan bir kürenin düzgün yük yoğunluğu ρ_v ve toplam pozitif yükü Q dur. (a) Kürenin dışındaki bir noktada E=?



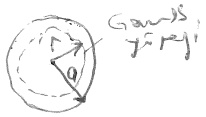
Simetriye önceki örnek pot örüne olan dağılımda

$$E = k\frac{Q}{r^2} \quad (r > a \text{ için}) \text{ olur.}$$

Bu sonuç kürenin merkezindeki bir yük için elektrik alanıyla aynı olur.

(b) Kürenin içindeki bir noktadaki elektrik alanı E=?

r<a gauss yüzeyi V' hacimli olsun



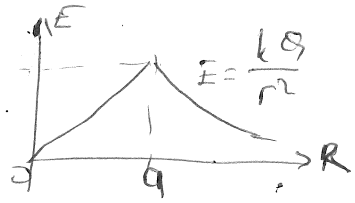
$q_{ic} = \rho_v V'$ olur. $\Rightarrow q_{ic} = \rho_v V' = \rho_v\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ tür.

$$\oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{ic}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{ic}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_v \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{\rho_v r}{3\varepsilon_0}$$

$$\rho_v = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \text{ ve } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{kQ}{a^3} r \quad (r < a \text{ için})$$

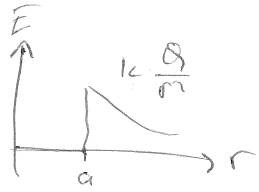
$r \to 0$ için $E \to 0$ olur. $1/r^2$ ile orantılı olsa bu durum mümkün olmaz. r=a için a şıkkı ile aynı sonuç bulunur.



İnce küresel bir tabakanın Elektrik alanı

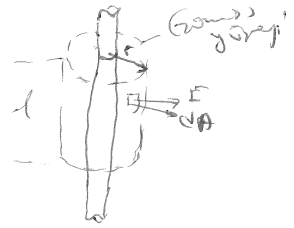
$r < a$ için $E = 0$

$r > a$ için $E = k\dfrac{Q}{r^2}$ bulunur.



Silindirik simetrili bir yük dağılımı

ρ_ℓ çizgisel yük yoğunluklu, sonsuz uzunlukta doğrusal (çizgisel) + bir yükten r uzaklıktaki $E = ?$ bulunuz.



Silindir tabanları $E \perp dA$ dik olduğundan $\vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$ dır.

Yanal alanlarda

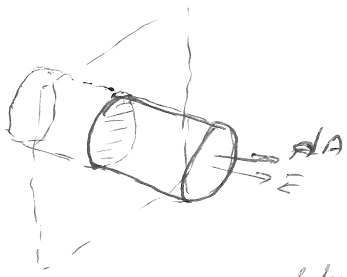
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\oint dA = E.A = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_\ell l}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \frac{\rho_\ell l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k\frac{\rho_\ell}{r} \text{ olur.}$$

Yalıtkan düzlem bir yük tabakası

$\rho_s = \sigma$ yüzey yük yoğunluklu, yalıtkan, sonsuz + yüklü bir düzlemin elektrik alanı $E = ?$

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \text{ olur.}$$

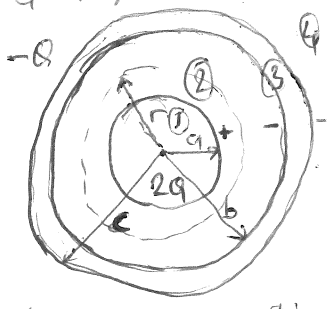


Elektrostatik denpedeki iletkenler.

Elektrostatik denpedeki iletkenler elektrostatik denpededir. Bu durumda, itici yük hareketi olmadığında iletken

1. İletken içinde her yerde elektrik alanı sıfırdır.
2. Yalıtılmış bir iletkende yük varsa bu yük iletkenin dışındadır.
3. İletkenin dışındaki $E = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0}$ dır.
4. Düzgün biçimli olmayan iletkende, yüzeyin eğrilik yarıçapı en küçük (sivri) olduğu yerlerde yüzeysel yük yoğunluğu en büyüktür.

Küresel tabaka içinde bir küre



a yarıçaplı iletken 2Q yüklü bir, c dış yarıçaplı iletken küresel tabaka −Q net yükü taşıyor. Ekri bulunuz.

$r < a$ için $E_1 = 0$ dır.

$a < r < b$ için: $q_{iç} = 2Q \Rightarrow E_2 A = E_2(4\pi r^2) = \dfrac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \dfrac{2Q}{\varepsilon_0}$

$$E_2 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2kQ}{r^2}$$

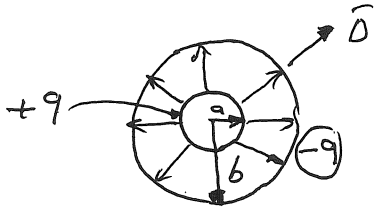
$r > c$ için $q_{iç} = 2Q + (-Q) = Q$

$$E_4 = \frac{kQ}{r^2}$$

③ $b < r < c$ için $E_3 = 0$ dır.

Elektrik Akısı ve Akı Yoğunluğu

Aynı merkezli iki iç-içe küre arasında bir dielektrik madde bulunsun, içteki kürenin yükü +q ise yüksüz olan dıştaki küre −q yükü ile yüklenir.



Deplasman:
Bu olay, Deplasman (yerdeğiştirme) olayı olarak adlandırılır.

Deplasman $\bar{D}$ harfi ile gösterilir ve vektörel bir büyüklüktür.

$$\bar{D} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{C}{m^2}$$ olarak verilir

ψ : akı (akı çizgileri) (C)
S : yüzey (m^2)
$\bar{D}$: akı yoğunluğu ($\frac{C}{m^2}$)

$$d\psi = \bar{D} \cdot ds \Rightarrow \psi = \oint \bar{D} \cdot ds$$ olur.

Deplasman vektörü radyal yönde olup $\bar{D} = \frac{q}{4\pi a^2}\bar{a}_r$ ve $\bar{D} = \frac{-q}{4\pi b^2}\bar{a}_r$

Eğer iç küre bir nokta kabul edilirse; $\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\bar{a}_r \ \frac{C}{m^2}$ olur.

$\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \cdot \bar{a}_r$ şeklinde yazılırsa $\bar{D} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E}$ olur.

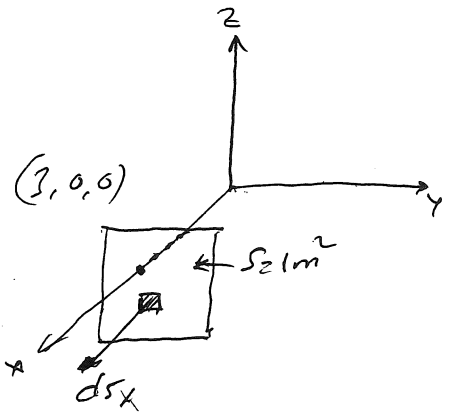
Gauss Yasası

Herhangi bir kapalı yüzeyden geçen elk akısı, yüzeyin çevraladığı toplam yüklerle ifade edilir.

$$\psi = \oint \bar{D} \cdot ds$$

Bu yasanın uygulanabilmesi için
1- Yüzey kapalı olmalı
2- Yüzey üzerinde herhangi bir noktada $\bar{D}$ vektörünün teğetsel veya normal bileşenlerinden biri bulunmalı.
3- $\bar{D}$ nin dik olduğu yüzeyin tüm noktalarında, $\bar{D}$ aynı değere sahip olmalı

Örnek! $\bar{D} = 10x\,\bar{a}_x$ olarak veriliyor x ekseninde 3'ünde bulunan $1m^2$'lik levhanın akı değerini bulunuz.



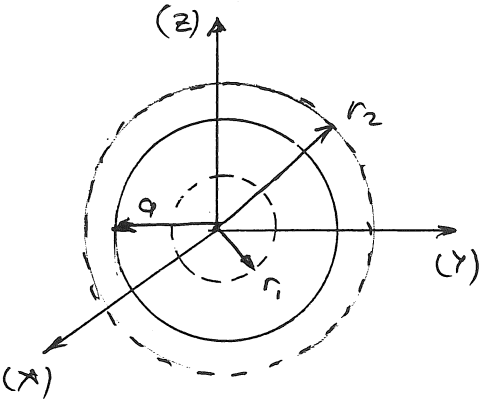
Verilen $\bar{D}$'den akı çizgilerinin yönü $+a_x$ yönündedir.

$$\bar{D} = 10x \cdot \bar{a}_x = 10 \cdot 3 = 30\,\bar{a}_x \ \frac{C}{m^2}$$

$$\psi = \bar{D} \cdot ds = 30 \cdot 1\,\bar{a}_x \cdot \bar{a}_x = 30\ C$$ bulunur.

Örnek 2 Yarıçapı "a" olan bir küresel yük orijinde bulunuyor. Bu küre için yük yoğunluğu ρ_v olup düzgün dağılımlıdır.

a) $r < a$ için,
b) $r > a$ için akı yoğunluklarını bulunuz. (Gauss yasasını kullanınız)



a) $r < a$ için,

$$Q_v = \oint \bar{D} \cdot ds \Rightarrow Q_v = \int_v \rho_v \cdot dv = \left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)\rho_v$$

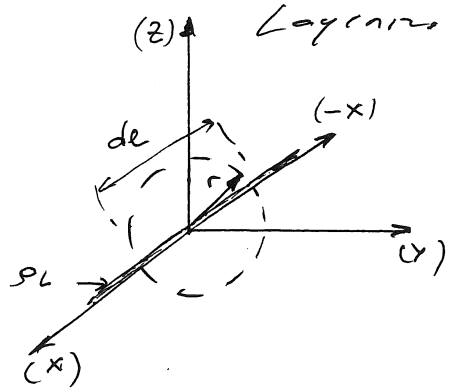
$$\bar{D} = \frac{(4/3 \cdot \pi r_1^3)\rho_v}{4\pi r_1^2} = \frac{r_1 \rho_v}{3}\bar{a}_{r_1} \quad \frac{C}{m^2}$$

b) $r > a$ için,

$$Q_v = \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\rho_v$$

$$\bar{D} = \frac{\left(\frac{3}{4}\pi a^3\right)\rho_v}{4\pi r_2^2} = \frac{a^3 \cdot \rho_v}{3 r_2^2}\bar{a}_{r_2} \quad \frac{C}{m^2}$$ bulunur.

Örnek 3 x ekseni boyunca uzanan bir çizgisel yük için yük yoğunluğu 3 μC/m dir. Orijinden itibaren 3 m uzaklıkta küresel bir yüzey kabul edilerek yüzey akısını tanımlayınız.



Belirlenen kabul küresinde kalan iletken boyu $dl = 2 \cdot r = 6m$ olur.

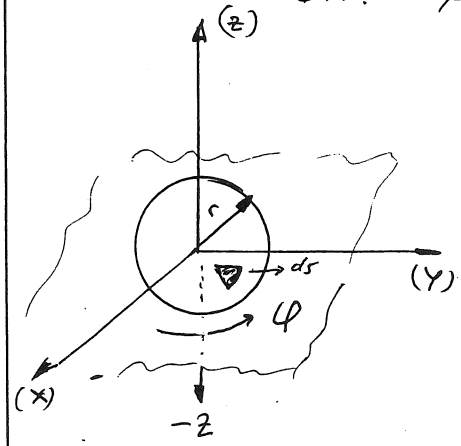
$$\bar{D} = \frac{\rho_L \cdot dl}{4\pi R^2} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 6m}{4\pi \cdot 3^2} = 1{,}59\ 10^{-7}\ \frac{C}{m^2}$$

veya

$$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 3} = 1{,}59\ 10^{-7}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\psi = \oint \bar{D} \cdot ds = 1{,}59 \cdot 10^{-7}\,(4\pi \cdot 3^2) = \underline{1{,}8\ 10^{-5}\ C}$$

Örnek 4 Bir dairesel dokin yarıçapı 4m ve $\rho_s = 12 \sin\varphi\ \mu C/m^2$ dir. Kapalı yüzey akısını bulunuz.



$$\begin{cases} \psi = \rho_s \cdot ds \\ ds = (r \cdot d\varphi) \cdot dr \end{cases}$$

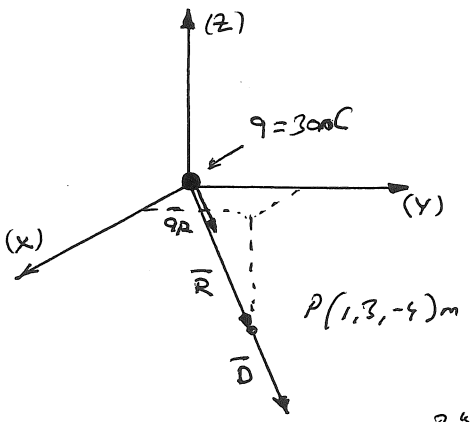
$$\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{4} (12 \sin\varphi)(r \cdot d\varphi \cdot dr)$$

$$\varphi = 12 \cdot \Big|_0^{2\pi} -\cos\varphi \ \Big|_0^{4} \frac{r^2}{2}$$

$$\varphi = 12\left[(1-1)\ \frac{2^2}{2}\right] = 0$$ bulunur.

Kapalı yüzeyde akı sıfırdır.

Örnek 5 30 nC'luk bir yük kartezyen sistemde orjinde bulunuyor. P(1, 3, -4)m noktalarındaki akı yoğunluğunu tanımlayınız.



$$\bar{R} = \bar{a}_x + 3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z$$
$$|\bar{R}| = \sqrt{26}$$
$$\bar{a}_R = \frac{\bar{a}_x + 3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z}{\sqrt{26}}$$

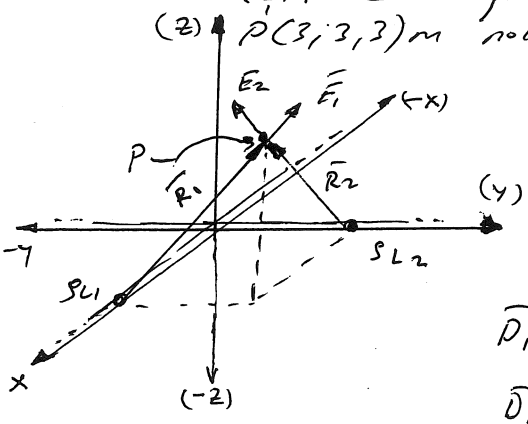
$$\bar{D} = \frac{\psi}{S}\bar{a}_R = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{4\pi\sqrt{26}^2}\bar{a}_R$$

$$D = 9{,}18\left(\frac{\bar{a}_x + 3\bar{a}_y - 4\bar{a}_z}{\sqrt{26}}\right)\frac{C}{m^2}$$

Böylece; $9{,}18 \frac{C}{m^2}$ lik akı yoğunluğu ve $\bar{a}_R$ yönünde olduğu görülür.

Çözüm için; $|\bar{R}|$ uzaklığı yarıçap alıp bir küresel kabuk çizilerek (gauss yüzeyi) çözüm aranır.
Ayrıca yük noktasal olduğu için $\bar{D}$ radyal yönde (yarıçap yönünde) olur. Böylece dış kabuğa dik her vektör $\bar{D}$ vektörü şiddetindedir.

Örnek 6 İki özdeş düzgün yük değerlimli çizgisel yük x ve y eksenlerine yerleştirilmişler ve yük yoğunlukları da eşit ve 20 pC/m olarak verilmiştir. Bu iki yük ile ilişkin P(3,3,3)m noktasında oluşacak elk. alanını tanımlayınız.



$$\bar{R}_1 = 3\bar{a}_y + 3\bar{a}_z \Rightarrow |\bar{R}_1| = \sqrt{18}$$
$$\bar{R}_2 = 3\bar{a}_x + 3\bar{a}_z \Rightarrow |\bar{R}_2| = \sqrt{18}$$
$$\bar{a}_{R_1} = \frac{3\bar{a}_y + 3\bar{a}_z}{\sqrt{18}} = \frac{\bar{a}_y + \bar{a}_z}{\sqrt{2}}$$
$$\bar{a}_{R_2} = \frac{3\bar{a}_x + 3\bar{a}_z}{\sqrt{18}} = \frac{\bar{a}_x + \bar{a}_z}{\sqrt{2}}$$

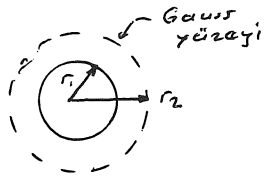
$$\bar{D}_1 = \bar{E}_1 \cdot \varepsilon_1 = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{2\pi\varepsilon_1\sqrt{18}} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\bar{a}_y + \bar{a}_z}{\sqrt{2}} \frac{V}{m}$$

$\bar{D}_1 = 0{,}54\bar{a}_y + 0{,}54\bar{a}_z \frac{V}{m}$ bulunur.

Aynı şekilde $\bar{D}_2 = 0{,}54\bar{a}_x + 0{,}54\bar{a}_z \frac{V}{m}$ bulunur.

$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 = 0{,}54\bar{a}_x + 0{,}54\bar{a}_y + 1{,}08\bar{a}_z \frac{V}{m}$ olarak elde edilir.

Örnek 7 0,1m yarıçaplı bir küranin 15cm uzaklıktaki bir noktada oluşturacağı elk. alanı $\bar{E} = 3 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$ olarak veriliyor. Kuranin yükünü bulunuz.



$r_1 = 0{,}1m$
$r_2 = 0{,}15m$

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} = \left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)(3 \cdot 10^3) = 2{,}65\ 10^{-8}\frac{C}{m^2}$$

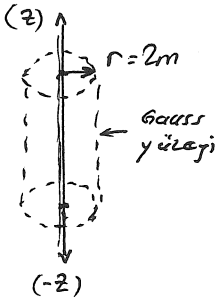
Bulunan $\bar{D}$ r_2 yarıçaplı bir gauss yüzeyine göre bulunarak tanımlandı

$$\psi = \bar{D} \cdot S \Rightarrow \psi = \left(2{,}65 \cdot 10^{-8}\frac{C}{m^2}\right) \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot 0{,}15^2\ \frac{V}{m}\right)$$

$$Q = \psi = 7{,}5\ 10^{-9}\ C \text{ olur.}$$

Not: Bulunan yük değeri $\bar{D}$ nin yönüne göre ± olabilir.

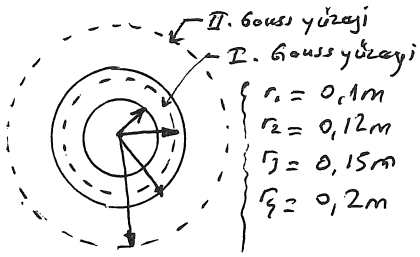
Örnek 8 Sonsuz uzunlukta bir çizgisel taşıyıcı 2m uzaklıktaki bir noktada $4{,}5\ 10^{4}\ \frac{V}{m}$ lik bir elk. alanı oluşturuyor. Yük yoğunluğunu bulunuz.



$$\bar{E}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon r}\,\bar{a}_r \,, \qquad \rho_L = \bar{E}_L \cdot (2\pi\varepsilon r)$$

$$\rho_L = \left(4{,}5\ 10^{4}\ \frac{V}{m}\right)\left(2\pi\varepsilon_0 2\right) = 5 \cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m}$$ olarak bulunur.

Örnek 9 Yarıçapları 0,1 ve 0,15 olan eşmerkezli iki küre sırasıyla $4 \cdot 10^{-8}$ C ve $2 \cdot 10^{-8}$ C luk yüklere sahiptir.
a) 0,12m'de, b) 0,2m'de elk. alanını bulunuz.
Not: Küreler arası dielektrik maddede havadır.



$$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon}$$

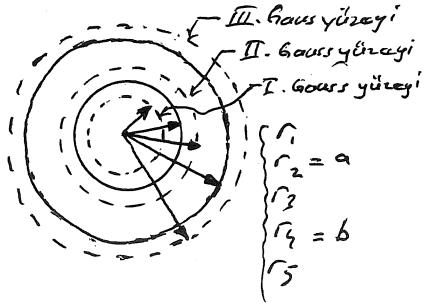
a) $$\bar{D}_1 = \frac{\psi_1}{S_1} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{4\pi (0{,}12)^2} = 2{,}2\ 10^{-7}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\bar{E}_1 = (2{,}2\ 10^{-7}) \Big/ \frac{10^{-9}}{36\pi} = 2{,}5\ 10^{4}\ \frac{V}{m}$$

b) $$\bar{D}_2 = \frac{\psi_2}{S_2} = \frac{(4\ 10^{-8}) + (2\ 10^{-8})}{4\pi\ (0{,}2)^2} = 1{,}19\ 10^{-7}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\bar{E}_2 = (1{,}19\ 10^{-7}) \Big/ \frac{10^{-9}}{36\pi} = 1{,}35 \cdot 10^{4}\ \frac{V}{m}$$ olarak bulunur

Örnek 10 Yarıçapları a ve b olan iki küresel yük için elk. alanlarını tüm bölgeler için bulunuz.



a) $r < a$ olsun (r_1)

$\bar{E} = 0$ olur. Çünkü bu yüzeyin içerisinde yük sıfırdır.

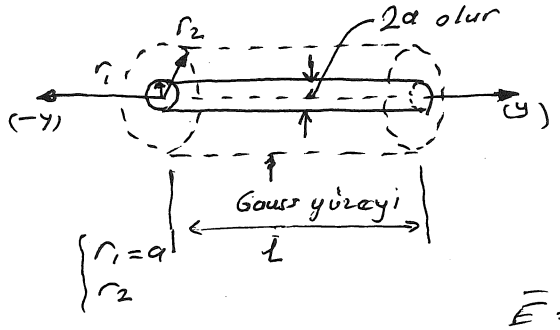
b) $b > r > a$ olsun (r_3)

$$\bar{D}_1 = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon r_3^2} \Rightarrow \bar{E}_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0} = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}\ \frac{V}{m}$$ olur.

c) $r > b$ olsun (r_5)

$$\bar{D}_2 = \frac{q_a + q_b}{4\pi r_5^2} \Rightarrow \bar{E}_2 = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r_5^2} \cdot \frac{V}{m}$$ olarak elde edilir.

Örnek 11 "a" yarıçaplı bir çizgisel taşıyıcının yük yoğunluğu "ρ_s" ve boyu "L" dir. Sayısal elk. alanını tanımlayınız.



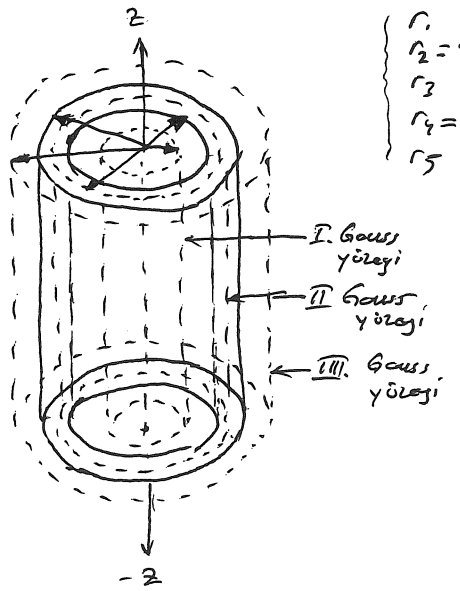
$$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon}$$

$$D = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\rho_s\, ds}{s} = \frac{\rho_s (2\pi a L)}{2\pi r_2 L}$$

$$\bar{D} = \rho_s \frac{a}{r_2}\,\bar{a}_r\ \frac{C}{m^2}$$ bulunur.

$$\bar{E} = \left(\rho_s \frac{a}{r_2}\right) \Big/ \varepsilon = \frac{\rho_s \cdot a}{r_2 \varepsilon}\,\bar{a}_r\ \frac{V}{m}$$ olur.

Örnek 12 2 ve 4 m yarıçapları arasında bulunan bir malzemenin yük yoğunluğu $\rho_v = \frac{C}{m^3}$ dür. Tüm bölgeler için $\bar{D}$ yi tanımlayınız.



r_1
$r_2 = a$
r_3
$r_4 = b$
r_5

a) $0 < r < 2m$ olsun (r_1)

Yük olmadığı için $\bar{D} = 0$ olur

b) $2 < r < 4m$ olsun (r_3)

$$dv = (\pi \cdot r_3^2 \cdot L) - (\pi \cdot 2^2 \cdot L) = \pi \cdot L (r_3^2 - 4)$$

$$Q_v = \rho_v \cdot dv = \rho_v (\pi L (r_3^2 - 4))$$

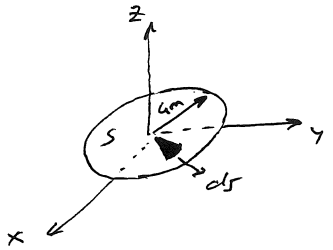
$$\bar{D} = \frac{Q_v}{ds} = \frac{\rho_v \pi \cdot L (r_3^2 - 4)}{2\pi L r_3} = \frac{\rho_v}{2r_3}(r_3^2 - 4)\,\bar{a}_r \frac{C}{m}$$

c) $r > 4m$ olsun (r_5)

$$Q_v = \rho_v dv = \rho_v (\pi \cdot L (16 - 4)) = \rho \pi \cdot L \cdot 12$$

$$\bar{D} = \frac{Q_v}{ds} = \frac{\rho_v \pi \cdot L \cdot 12}{2\pi L r_5} = \frac{6\rho_v}{r_5}\,\bar{a}_r \frac{C}{m}$$

Örnek 13 Yarıçapı 4m olan düzlem $\rho_s = (\sin^2\varphi / 2r)\ \frac{C}{m^2}$ yük yoğunluğu taşıyıp, Bu kapalı yüzeyin oluşturacağı elk. akısını bulunuz.

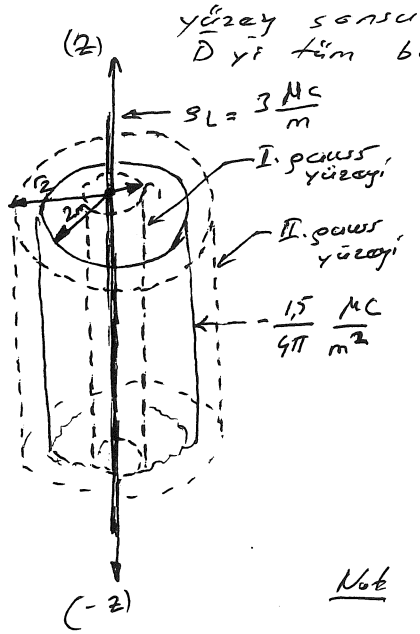


$$\psi = Q = \oint \rho_s\, ds = \oint \frac{\sin^2\varphi}{2r} \cdot (r\, d\varphi\, dr)$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \frac{\sin^2\varphi}{2r}\, d\varphi\, r\, dr$$

$$\psi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\, \frac{1}{2r} \int_0^4 r\, dr = \cdots\cdots = 2\pi\ C \text{ bulunur}$$

Örnek 14 z eksenine yerleşmiş $\frac{3\mu C}{m}$ yoğunlukla çizgisel bir yük ve eşmerkezle yerleştirilmiş 2m yarıçaplı $\frac{-1,5}{4\pi}\ \mu C/m^2$ yük yoğunlukla diğer bir yüzey sonsuz uzunluklardadır. D yi tüm bölgeler için tanımlayınız.



$$Q_L = \rho_L \cdot dl = (3 \cdot 10^{-6})\, L\ C$$

a) $0 < r < 2m$ aralığında,

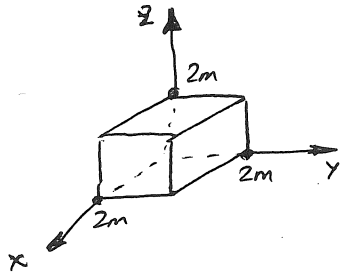
$$\bar{D}_1 = \frac{Q_L}{ds_1} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot L}{2\pi r_1 L} = \frac{0,477}{r_1}\ \mu C/m^2$$

b) $r > 2m$ için

$$\bar{D}_2 = \frac{Q_t}{ds_2} = \frac{(3 \cdot L) + (-\frac{1,5}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot 2L)}{2\pi r_2 L} = \frac{0,239}{r_2}\ \frac{\mu C}{m^2}$$

Not $Q_t = Q_L + Q_s = (\rho_L \cdot dl) + (\rho_s \cdot ds)$
$= (3 \cdot L) + (-\frac{1,5}{4\pi} \cdot (2\pi \cdot 2L))$ olur.

Örnek 15 Şekildeki prizmanın dışına çıkan akıyı bulunuz.



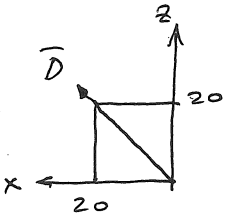
Not: $\bar{D} = 5x^2\bar{a}_x + 10z\,\bar{a}_z \ \frac{C}{m^2}$ veriliyor.

$$\bar{D} = 5.2^2\bar{a}_x + 10.2\bar{a}_z = 20(\bar{a}_x + \bar{a}_z) \text{ olur.}$$

$$\varphi = \oint \bar{D}.ds = 20(\bar{a}_x + \bar{a}_z)\underbrace{(2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + 2\bar{a}_z)}_{ds}$$

$$\varphi = 40(1+1) = 80\,C \text{ bulunur.}$$

Açıklama:



$\bar{D} = 20(\bar{a}_x + \bar{a}_z)$ vektörünün yüzeyden dik çıkıştığı bilinir.
Böylece $\bar{D}$ nin iki dik bileşeni bulunur.
1. bileşen z olup, x-y düzleminden,
2. bileşen x olup, y-z düzleminden geçer.

$$\varphi = \oint \bar{D}.ds = 20(\bar{a}_x + \bar{a}_z)\left((2\bar{a}_x\,\bar{a}_y)(2\bar{a}_y.\bar{a}_z)\right)$$

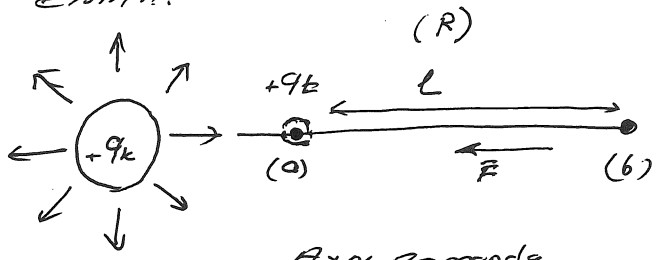
$$\varphi = 20(\bar{a}_x + \bar{a}_z)(4(\bar{a}_x.\bar{a}_y.\bar{a}_y.\bar{a}_z) = 20(\bar{a}_x + \bar{a}_z)(4\bar{a}_x\bar{a}_z)$$

olur ve $\varphi = 80C$ bulunur.

Sonuç: Toplam vektörün dik olduğu yüzey bileşenlerinin dik oldukları yüzeylerin çarpımlarından elde edilir.

Potansiyel ve Potansiyel fark

Bir bölgesel elk. alanı içerisinde bulunan test yükü $\bar{F}$ kuvveti ile itilir. Bu enerji alan tarafından karşılanır. Aynı test yükünü bulunduğu yeri noktadan eski yerine gönderebilmek için harici bir enerjiye ihtiyaç duyulur. Bu enerji elektrik alanı tarafından ersilir.



Test yükü a noktasından b ye itiliyorsa bir iş yapılmış olur ve bir enerji harcanmıştır. Bu olay

$$\left\{ V = \frac{W}{q} = \frac{J}{C} \right.$$ olarak bilinir.

$W = V.q$ olur.

Aynı zamanda,

$\{ dW = F.dL$ olarak tanımlanır.

Ista; 1C'luk bir yükün b noktasına hareketi için 1J enerji gerekli ise $V_{ab} = 1V$ denir.

* Potansiyel fark; işin sebebidir ve birim yüke yaptırılan iş olarak bilinir.

$$dV_{ab} = \frac{dW}{q_t} = \frac{F.dL}{q_t} \Rightarrow V_{ab} = \int \frac{\bar{E}.\cancel{q_t}.dL}{\cancel{q_t}} \quad \left\{ \bar{E} = \frac{F}{q_t} \right.$$

$$V_{ab} = -\int_{(a)}^{(b)} \bar{E}.dL$$ olarak bulunur. $\left\{ \begin{array}{l} \text{"}-\text{" pot. fark tersyazıldığından} \\ \text{Birim: } V = \frac{V}{m}.m \end{array} \right.$

Şekildeki devrede a-b arası R olsun (uzaklık (m)),

$$V_{ab} = -\int_{b}^{a} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon R^2}.dL \Rightarrow V_{ab} = -\int_{b}^{a} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon R^2}.dR \quad \left\{ \begin{array}{l} dL \text{ yerine} \\ dR \text{ yazılabilir} \end{array} \right.$$

$$V_{ab} = -\frac{q_k}{4\pi\varepsilon}\int_{b}^{a} \frac{dR}{R^2} \Rightarrow V_{ab} = -\frac{q_k}{4\pi\varepsilon}\int_{b}^{a} R^{-2}\,dR$$ yazılabilir.

$$V_{ab} = -\frac{q_k}{4\pi\varepsilon}\left.\frac{R^{-2+1}}{(-2+1)}\right|_{b}^{a} = -\frac{q_k}{4\pi\varepsilon}\left.\frac{R^{-1}}{-1}\right|_{b}^{a} = -\frac{q_k}{4\pi\varepsilon}\left.\left(-\frac{1}{R}\right)\right|_{b}^{a}$$

$$V_{a\cancel{\infty}} = -\frac{q_k}{4\pi\varepsilon}\left(-\left(\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{\cancel{\infty}}\right)\right)\right) \Rightarrow \frac{q_k}{4\pi\varepsilon R}\ \frac{V}{\cancel{m}}.\cancel{m}$$ bulunur. $\left| \begin{array}{l} \text{b noktası} \\ \text{sonsuz düşünülür} \end{array} \right.$

V_a $\quad 0$

Not * 1 C'luk bir yükü sonsuzdan alan işerisine getiran enerji 1J ise noktanın potansiyeli bir Volt olur.

* Yük sayısı çok olursa $V = \sum_{n=1}^{m} \frac{q_m}{4\pi\varepsilon R}$ yaklaşım ile potansiyel bulunur.

* $q_k = \rho_L.dL$, $\quad q_k = \rho_s.ds$, $\quad q_k = \rho_v.dv$ dir.

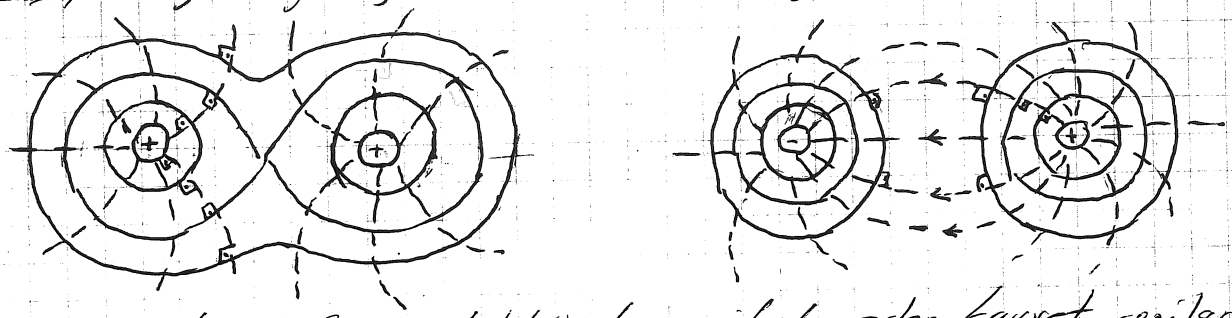
Potansiyel farkı

Potansiyel farkı, iki nokta arasındaki potansiyelin farkı olarak belirtebiliriz. (Ancak, iki nokta aynı ortamda olmalıdır)

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_A} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) \text{ dır.}$$

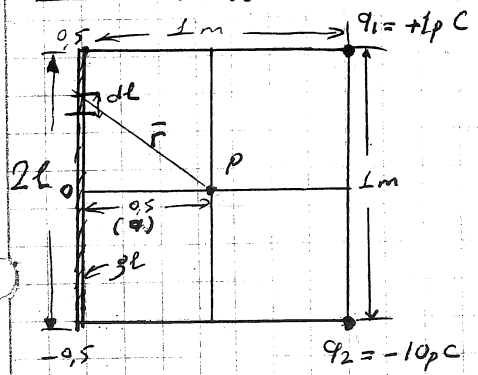
Potansiyel Dağılım

Bir elk. alanında potansiyel dağılım, aş-potansiyelli yüzeylerle gösterilir. Eş-potansiyel yüzeysel elk. kuvvet çizgilerine diktir.



Kesik çizgiler elektrik alanını ifade eden kuvvet çizgileridir. Sürekli çizgiler aş-potansiyel yüzeylerdir.

Çalışma (Sınavın bitiminde verilecek)



Kenar uzunlukları 1m olan karenin köşelerine şekildeki verilen yükler yerleştirilmiştir. $\rho_L = 10pC/m$ yoğunlukla bir çizgisel yük karenin sol kenarına yerleştirilmiştir. "P" noktasındaki potansiyeli bulunuz.

Noktasal yüklerin "P" noktasındaki top. potansiyelleri

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10^{-12}}{0{,}707} - \frac{10^{-11}}{0{,}707}\right) = -0{,}115\ V$$

Çizgisel yükün "P" noktasındaki potansiyeli

$$V_L = \frac{\rho_L \cdot dL}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-0{,}5}^{0{,}5}\frac{dL}{(0{,}5^2+L^2)^{1/2}} \qquad \left| \begin{array}{l} r^2 = 0{,}5^2 + L^2 \\ r = \sqrt{0{,}5+L^2} \end{array}\right.$$

$$V_L = \frac{10^{-11}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(0{,}5+\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2}\right) - \ln\left(-0{,}5+\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2}\right)\right)$$

$$= \frac{10^{-11}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln 1{,}207 - \ln 0{,}207\right)$$

$$= 0{,}09\left(0{,}18 - (-1{,}57)\right) = 0{,}158\ V\ \left(\frac{J}{C}\right)$$

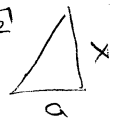
$$\int_a^b \frac{dL}{(L^2+a^2)^{1/2}} = \ln\left(L + \sqrt{L^2+a^2}\right)$$

Çözüm ardı

$$V = V_P + V_L = -0{,}115 + 0{,}158 = 43\ mV$$

Açıklama: sınırlar 0 ile 0,5 arasında alınıp sonuç 2 ile çarpılır.

$$f = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad x = a.\tan t \qquad dx = a(1+\tan^2 t)\,dt$$



$\tan t = \frac{x}{a}$

$x = \tan t . a$

$\sec^2 t - \tan^2 t = 1$

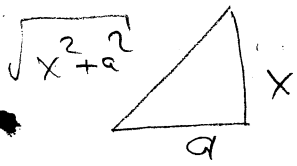
$\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$

$\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t}$

$$= \int \frac{a(1+\tan^2 t)\,dt}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2 t}}$$

$$= \int \frac{a(1+\tan^2 t)\,dt}{a\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int (1+\tan^2 t)^{1-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \int \sqrt{1+\tan^2 t}\,.dt = \int \sec t\,.dt = \ln(\sec t + \tan t)$$



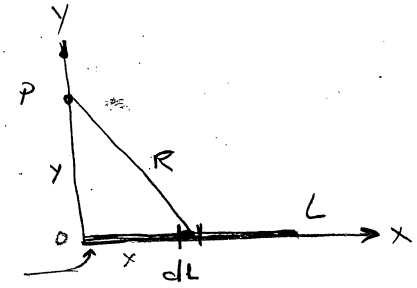
$\sec t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$

$\tan t = \frac{x}{a}$

$$\int \sec t\,dt = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| \text{ olur.}$$

Ş:



$\rho L = K.x$ olacak şekilde dağılmış (K bir sabit) olsun

L boyunda düzgün yük dağılımlı bir çubuk. x ekseninde bulunuyor. P noktasında oluşturacağı potansiyeli bulunuz.

$$R = (y^2+x^2)^{1/2} \qquad V = \int \frac{q\,dL}{4\pi\varepsilon R}$$

$$V_P = \int \frac{K.x\,dL}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}}$$

{ dL yerine dx alınabilir |

$$V_P = \frac{K}{4\pi\varepsilon}\int_0^L \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$V_P = \frac{K}{4\pi\varepsilon}\int_0^L \frac{dt/2}{\sqrt{t}}$$

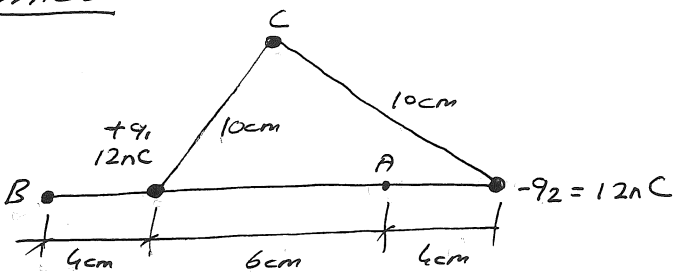
| $x^2+y^2 = t$ olsun.
$2x\,dx = dt$
$x\,dx = dt/2$ olur.

$$= \frac{K}{4\pi\varepsilon}\int_0^1 \frac{1}{2}\,t^{-1/2}\,dt$$

$$= \frac{K}{4\pi\varepsilon}\left|_0^L \frac{1}{2}\,\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right. = \frac{K}{4\pi\varepsilon}\left((y^2+L^2)^{1/2} - y\right)$$ olarak bulunur.

Pot. ve Pot. Fark Ornekleri

Ornek 1



iki zıt yükün A, B ve C noktaları üzerinde oluşturacakları potansiyelleri bulunuz.

q_1'in A daki potansiyeli

$$V_{Aq_1} = k \cdot \frac{q_1}{R} = 9.10^9 \frac{12.10^{-9}}{0,06} = 1800V$$

q_2'nin A da oluşturacağı potansiyel

$$V_{Aq_2} = k \cdot \frac{q_2}{R} = 9.10^9 \cdot \frac{-12.10^{-9}}{0,04} = -2700V$$

A noktasının potansiyeli

$$V_A = (V_{Aq_1}) + (V_{Aq_2}) = 1800 - 2700$$
$$V_A = -900V$$

q_1 in B de oluşturacağı potansiyel

$$V_{Bq_1} = 9.10^9 \frac{12.10^{-9}}{0,04} = 2700V$$

q_2'nin B de oluşturacağı potansiyel

$$V_{Bq_2} = 9.10^9 \cdot \frac{-12.10^9}{0,14} = -770V$$

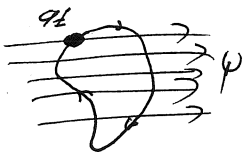
B noktasının potansiyeli

$$V_B = (V_{Bq_1}) + (V_{Bq_2})$$
$$V_B = 2700 - 770 = 1930V$$

C noktasının potansiyeli

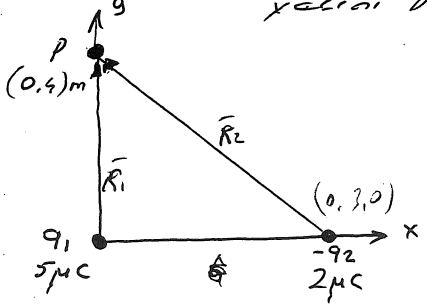
$V_C = 0$ bulunur. (Simetriklik)

Ornek: Kapalı bir hareket yaptırılan q_t nin potansiyelini bulunuz.



$$V = \oint \bar{E} \cdot dL = 0$$ sıfır (iş yoktur)

Ornek 2 a) Sonsuzda potansiyel sıfır alınırsa, "P" noktasının potansiyelini bulunuz.



$$V_{P1} = -\frac{q_1}{4\pi\varepsilon} \Big|_4^0 \left(\frac{1}{R}\right), \quad V_{P2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \Big|_5^0 \left(\frac{1}{R}\right)$$

$$V_P = V_1 + V_2 = k\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right) = \left(9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(\frac{5.10^{-6}C}{4m} - \frac{2.10^{-6}C}{5m}\right)$$

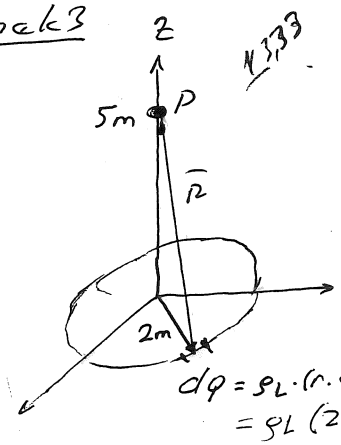
$$V_P = 7,65.10^3 V$$

$$V_{P_1} = 11250 - 3600 = 7650V$$

b) Sonsuzdaki 4μC'luk bir üçüncü yükü (noktasal) P noktasına taşıyabilmekisin yapılması gerekli iş'i bulunuz.

$$W = Q_3 \cdot V_P = (4.10^{-6}C)(7,65.10^{-3}V) = 3,06\ 10^{-2} J$$

Ornek 3 $\left(\frac{40}{3}\right)$nC'luk yüke sahip çemberin yarıçapı 2m dir.



a) P=5m daki potansiyeli bulunuz.

$\sqrt{29} = |\bar{R}| = 5,38m$

$$V_P = \int \frac{\rho_L \cdot dL}{4\pi\varepsilon R} \qquad \left\{ \rho_L = \frac{\frac{40}{3} 10^{-9}}{2\pi(2)} = \frac{10^{-8}}{3\pi} \frac{C}{m} \right.$$

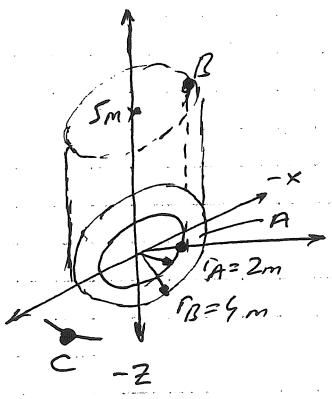
$$V_P = \int_0^{2\pi} \frac{(10^{-8}/3\pi) \cdot (2\, d\varphi)}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} \sqrt{29}} = 22,3V$$

$$d\varphi = \rho_L \cdot (r \cdot d\varphi) = \rho_L (2 \cdot d\varphi)$$

b) Yük orjinde olsaydı V_P ne olurdu

$$V = \frac{(40/3)\, 10^{-9}}{4\pi\varepsilon 5} = 24V$$ bulunurdu.

Örnek 4



a) z ekseninde $\rho_L = \left(\frac{10^{-9}}{2}\right) \frac{C}{m}$ lik bir çizgisel homojen dağılımlı yük bulunmaktadır.
A $(2m, \pi/2, 0)$ ~~ve~~ B$(4m, \pi, 5m)$ noktaları arasındaki pot. farkı bulunuz.

$$V_{AB} = -\int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{L} \quad , \quad \bar{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon R}\,\bar{a}_R$$

$$= -\int_b^a \frac{10^{-9}}{2(2\pi\varepsilon r)}\,dr = -\frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$= -9\,\ln\Big|_4^2 = -9\,|\ln 2 - \ln 4| = 6{,}24\,V$$

b) $r_C = 10\,m$ olsun. $V_{BC} = ?$

$$V_{BC} = -9\,|\ln r\,|_C^B = -9\,|\ln 4 - \ln 10| = 8{,}95\,V \text{ bulunur.}$$

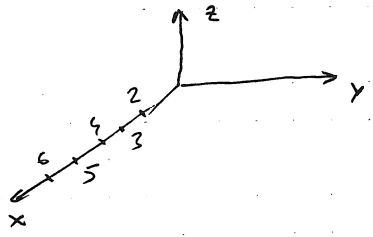
c) $V_{AC} = ?$

$$V_{AC} = -9\,|\ln r\,|_C^A = -9\,|\ln 2 - \ln 10| = 14{,}5\,V \text{ bulunur.}$$

d) $V_{AB} + V_{AC} = ?$ $6{,}24 + 8{,}25 = 14{,}5\,V$ bulunur.

Not: Potansiyel uzaklıkla lineer değişmektedir.

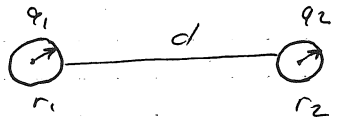
Örnek 5 20nC'luk 2, 3, 4, 5 ve 6 metrelerdeki beş yük x ekseninde bulunuyorlar. Orjindeki potansiyeli bulunuz.



$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{m=1}^{n}\frac{Q_m}{R_m} = \frac{20\cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

$V_P = 261$ Volt bulunur.

Örnek 6 Yarıçapları r olan d uzaklıklı iki küre q_1 ve q_2 yükleri ile yüklü durumdalar.
Küreler birbirlerine temas ettirilip tekrar ayrılıyorlar. Kürelerin yük ve potansiyellerini belirleyiniz.

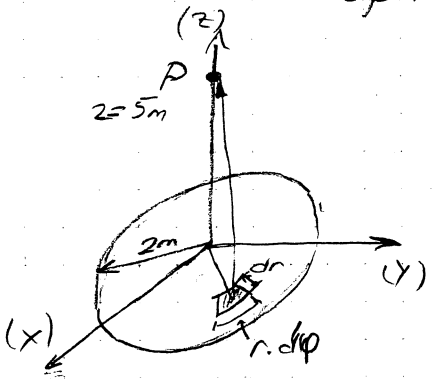


$Q_1 + Q_2 = 2Q$ (Değme durumu)

$\frac{Q_1 + Q_2}{2} \Rightarrow$ (Ayrılma durumu)

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon d} = \frac{Q_1 + Q_2/2}{4\pi\varepsilon d} = k\,\frac{q_1 + q_2}{2d} = \frac{9\cdot 10^9}{2}\left(\frac{q_1+q_2}{d}\right)$$

Örnek $\frac{40}{3}$ nC'luk toplam yük dairesel yüzeyde düzgünce dağıtılmıştır. V_P yi bulunuz.



$$ds = r\,d\varphi\,.dr$$

$$Q_s = \rho_s \cdot ds$$

$$\rho_s = \frac{\frac{40}{3}10^{-9}}{\pi 2^2} = \frac{10^{-9}}{3\pi}\frac{C}{m^2} = 1{,}06\,10^{-9}\frac{C}{m^2} \text{ bulunur.}$$

$$V_{P_r} = \frac{1.06\,10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{r}{\sqrt{25+r^2}}\,dr$$

$$V_{Pr} = 9{,}55\,.\,6{,}28\int_0^2 \frac{r}{\sqrt{t}}\,dr$$

$$= 59{,}9\int_0^2 \frac{dt/2}{t^{1/2}}$$

$$= 59{,}9\int_0^2 \frac{1}{2}\frac{dt}{t^{1/2}}$$

$$= 59{,}9\Big|_0^2 \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} = 59{,}9\Big|_0^2 t^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} s^2+r^2=t \\ 2r\,dr = dt \\ r.dr = dt/2 \end{array}\right.$$

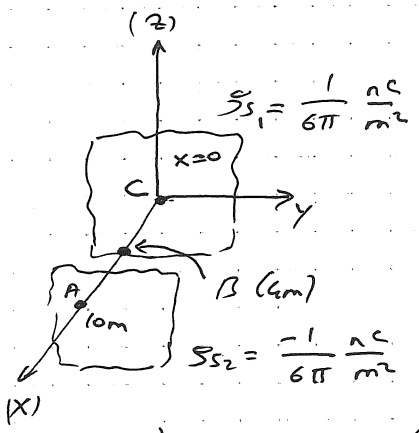
$$V_{Pr} = 59{,}9\Big|_0^2 \sqrt{25+r^2} = 59{,}9\,(5{,}38-5) = 22{,}7\,V \text{ bulunur.}$$

Örnek 7

$x=0$ da ve $x=10$ m de paralel iki levha düzgün yük dağılımına sahiptir. $x=0$ daki levhanın yük yoğunluğu $\frac{1}{6\pi}\frac{nC}{m^2}$ ve $x=10$ m daki $-\frac{1}{6\pi}\frac{nC}{m^2}$ dir.

A (10m, 0, 0) ve B (4m, 0, 0) ile C (0, 0, 0) m için potansiyelleri bulunuz.

a) $V_{AB}=?$ b) $V_{BC}=?$ c) $V_{AC}=?$



a) $0<x<10$ m için $\bar{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\cdot\bar{a}_x$

$$V_{AB}=-\int_4^{10}\bar{E}\cdot dL=-\int_4^{10}\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}dx$$

$$=\frac{\frac{1}{6\pi}10^{-9}}{10^{-9}/36\pi}\Big|_4^{10}x=-6(10-4)=-36V$$

b) $$V_{BC}=-\left(\frac{1.10^{-9}}{6\pi}\Big/\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)\Big|_0^4=-6(4-0)=-24V$$

c) $$V_{AC}=-\left(\frac{1}{6\pi}10^{-9}\Big/\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)\Big|_0^{10}=-6(10)=-60V$$

Örnek 8 "z" ekseni boyunca ρ_L yük yoğunluklu bir ince iletken bulunuyor. A $(1,\phi,z_1)$, B $(3,\phi,z_2)$ gibi iki nokta tanımlanmıştır.

$\bar{E}=\frac{50}{r}\bar{a}_r\ \frac{V}{m}$ olduğuna göre V_{AB}'yi bulunuz.

$$V_{AB}=-\int_b^a\bar{E}\cdot dL=-\int_3^1\frac{50}{r}dr$$

$$V_{AB}=-50\int_3^1\frac{dr}{r}=-50\Big|_3^1\ln r \Rightarrow V_{AB}=-50\ln\frac{1}{3}=55V \text{ bulunur.}$$

Akım ve Akım Yoğunluğu

Elektrik akımı, belirli bir nokta veya yüzeyden geçen elektrik yükünün hareket hızıdır. Sabit akım I, değişen akım i ile gösterilir. Birimi Amper (A)dir. (1A = 1C/1s)

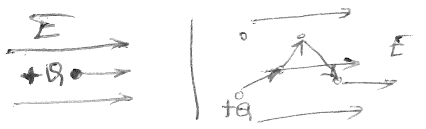
1 Amper: Birim zamanda (s), bir iletkenin nokta kesitinden 1C'luk yük akışı olarak tanımlanır.

Akım yoğunluğu: Birim yüzeyden (kesitten) geçen akım şiddetine denir.

J (akım yoğunluğu): ~~kesit / akım~~ $\frac{\text{Akım}}{\text{kesit}} \Rightarrow \frac{A}{m^2}$ biriminiyle ifade edilir.

Not: 1 C yük $6.24 \cdot 10^{18}$ elektrondan oluşur.

Akım şiddeti: Bir iletkenin bir noktasından bir saniyede geçen serbest elektron sayısıdır.



(a) boşluk (b) sıvı gaz

Boşlukta alan içinde kaldıkça artan hızla ivmeyle hareket eder. Sıvı veya gaz içindeyse diğer parçacıklara çarpışır. yönü değişir. Aynı tür maddede sabit E olursa rastlantısal değişimler birbirini sıfırlar ve ortalama bir hıza ulaşılır. E yönündeki bu hıza sürükleme hızı denir. Metallerde iletim dış yörüngedeki elektronlar ile sağlanır. Elektron-gaz kuramına göre bu elektronlar sıvı veya gaz tanecikleri gibi ortalama sürükleme hızına sahiptir. Sürükleme hızı elektrik alan şiddeti ile doğru orantılıdır.

$$v = \mu E \qquad \mu: \text{hareket yeteneği } (m^2/V.s)$$

İyi iletkenlerde bir elektrik alan uygulanı dışında dış yörüngede 1 ya da 2 elektron hareket eder

İletim akım yoğunluğu

Bir elektrik ~~alanının varlığında~~ alan uygulandığında, sabit kesitli bir iletkende ortaya bir iletim akımı çıkar. Akım yoğunluğu

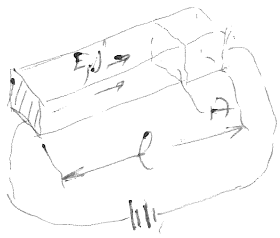
$$\vec{J} = \rho u \ (A/m^2) \text{ dir.}$$

$u = \mu E \Rightarrow J = \sigma E$ olur. $\sigma = \rho \mu$ malzemenin iletkenliğini gösterir metre başına siemens (S/m) olarak tanımlanır.

$J = \sigma E$ ohm kanunun noktasal biçimi diye bilinir.

Örnek 1:

Direnç:



Şekilde görüldüğü gibi düzgün bir kesit alana (A) ve l uzunluğuna sahip bir iletkenin iki ucu arasındaki gerilim farkı V ise akımın A yüzeyinde düzgün dağılımlı sayılırsa

$V = E.l$

$E = \frac{V}{l}$ ve $J = \sigma E = \sigma \frac{V}{l}$ ve toplam akım $I = J.\overset{S}{A} = \frac{\sigma A V}{l}$

$\boxed{I = \int J \, ds}$

ohm yasasından $V = IR \Rightarrow R = \frac{l}{\sigma A}$ (Ω) olur.

Yüksek akım yoğunluğu farklı ise $R = \frac{V}{\int J.ds} = \frac{V}{\int \sigma E ds}$ olur.

V gerilim farkı yerine E biliniyorsa $R = \frac{\int E dl}{\int \sigma E ds}$ olur.

Akım ve Akım Yoğunluğu

Elektrik yükleri hareketli akım oluştururlar.

Akım şiddeti birimi Amper dir

1. Amper: Birim zamanda (sn) bir iletkenin noktakesitinden 1 C'luk yük akması olarak tanımlanır.

Akım yoğunluğu: Birim yüzeyden (kesitten) geçen akım şiddetine denir.

- J (akım yoğunluğu) : $\frac{\text{Akım}}{\text{Kesit}} \Rightarrow \frac{A}{m^2}$ biriminiyle ifade edilir. $\left(\frac{A}{mm^2}\right)$ de verilebilir.

Not: 1 C'luk yük, $6,24\ 10^{18}$ serbest elektrondan oluşur.

Ör: Bir parça bakır telde $2,4 \cdot 10^{19}$ serbest elektron olduğuna göre, bu değer kaç kulonluk (C) yüke karşılık gelir?

$$Q = \frac{2.4 \cdot 10^{19}}{6.24 \cdot 10^{18}} = 3,85\ C$$

Akım şiddeti: Bir iletkenin bir noktasından bir saniyede geçen serbest elektron sayısıdır.

Ö $1mm^2$ kesitli bakır iletkenden geçen akım 10 A şiddetindedir. Serbest elektronların hızını bulunuz.

Bilgi: 2,54 cm kenarlı bakır küpün serbest elektron sayısı $1,4 \cdot 10^{24}$ tün

$1cm^3$ bakır için serbest elektron sayısı $\frac{1.4 \cdot 10^{24}}{(2.54)^3} = 8,54\ 10^{22}$ olur

- 1 C'luk yük için bakır hacmi $\frac{6.24\ 10^{18}}{8.54\ 10^{22}} = 7,3 \cdot 10^{-5} cm^3$ olur.

- 10 A için, $10 \frac{C}{sn}$ yazılabileceğine göre, bakır hacim $10 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} = 7,3 \cdot 10^{-4} \frac{cm^3}{sn}$

- Kesit $1 \cdot 10^{-2} cm^2$ olduğuna göre boyun bulunması;

$$l = \frac{V}{S} = \frac{7,3 \cdot 10^{-4}\ cm^3}{1 \cdot 10^{-2}\ cm^2} = 7,3 \cdot 10^{-2} cm$$

Ö $1,291 \cdot 10^{-3}$ m çaplı 1609 m uzunluğundaki bir bakır telin direncini bulunuz.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (1,291 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1,308 \cdot 10^{-6} m^2 \quad R = \frac{l}{k \cdot S} = \frac{1609}{(58 \cdot 10^6)(1.308 \cdot 10^{-6})} = 21,2\ \Omega$$

$k_{Cu} = 58 \cdot 10^6 \frac{\mho}{m}$

$k_{Cu} = 58 \cdot \frac{m}{\Omega mm^2}$

Bir iletkendeki toplam akım

$I = \int_S J \cdot ds$ formülü kullanılarak bulunur.

$di = \frac{dQ}{dt}$ şeklinde ifade edilebilir.

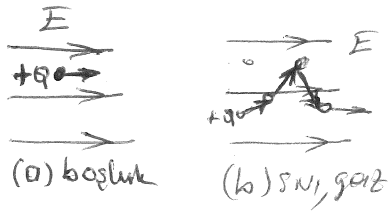
Akım ve Akım Yoğunluğu

Elektrik yüklerinin hareketli akımı oluştururlar. Elektrik akımı belirli bir noktadan ~~geçen~~ veya belirli bir yüzeyden geçen elektrik yükünün hareket hızıdır. Elektrik akım şiddeti birimi Amper (A) dir. ($1A = 1C/1s$)

1. Amper: Birim zamanda (sn) bir iletkenin nokta kesitinden 1. C'luk yük akması olarak tanımlanır.

Akımın gerilim ve dirence olan ilişkisini Ohm yasası tanımlar. Fakat sıvı, gaz veya + ve − yüklü taşıyıcıların bulunması gibi farklı karakteristiklerin bulunduğu ortamlarda basit Ohm kanunu yetersiz kalır. Bunun için Elektromanyetikte akım yoğunluğu $J (A/m^2)$ daha çok kullanılır.

Not: 1C'luk yük $6.24 \cdot 10^{18}$ elektronlar oluşur ($1C/1.6 \cdot 10^{-19}$)

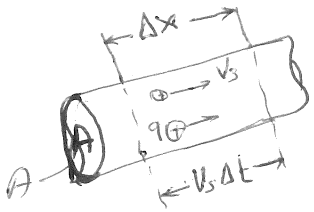


Boşlukta alan içinde kaldıkça artan v hızıyla hareket eder

Sıvı ve gaz içinde ise diğer parçacıklarla çarpışır, yönü değişir. Aynı tür maddede E sabit olursa rastlantısal değişimler birbirini sıfırlar ve ortalama bir hıza ulaşılır. E yönündeki bu hıza sürüklenme hızı denir. Metallerde iletim dış yörüngedeki elektronlar ile sağlanır. Elektron-gaz kanununa göre, bu elektronlar sıvı ve gaz daki gibi benzer olarak ortalama sürüklenme hızına ulaşır. Sürüklenme hızı elektrik alan şiddeti ile doğru orantılıdır.

$$v = \mu E \qquad \mu: \text{hareket yeteneği } (m^2/V.s)$$

İyi iletkenlerde bir elektrik alan uygulandığından dış yörüngede 1 yada 2 elektron hareket eder.



Kesit alanı : A Δx uzunluğundaki iletkenin hacmi $A \cdot \Delta x$ tir.
n birim hacim başına düşen yükle sayısı için, bu hacimdeki yük taşıyıcılarının sayısı $nA\Delta x$ olur. Bu parçadaki ΔQ yükü

$$\Delta Q = \text{Taşıyıcı sayısı} \times \text{parçacık başına düşen yük} = (nA\Delta x)q$$

v_s hızına sahip parçacık Δx yolunu Δt sürede alırsa $\Delta x = v_s \Delta t$ olur. Bu durumda

$$\Delta Q = (nAv_s\overbrace{\Delta t}^{\Delta t})q$$ eşitliğin her iki tarafı Δt'ye bölünürse

$$I_{ort} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_sA$$ olur. v_s (ortalama sürükleme hızı)

Ör: 12 ayar bakır tel $3{,}31 \cdot 10^{-6}\ m^2$ kesit alanına sahiptir. Şayet bakır tel 10 A'lik akım taşırsa, elektronların sürükleme hızı ne dir. Her bakır atomu akıma 1 elektron ile katkıda bulunuyor olsun. Bakırın yoğunluğu $8{,}95\ g/cm^3$ tür.

Çözüm: bakırın molar kütlesi 63,5 g/mol Herhangi bir maddenin 1 molü Avagadro sayısı ($6{,}02 \cdot 10^{23}$) kadar atom ihtiva eder. Bakırın yoğunluğunu bildiğimize göre 63,5 g bakırın kapladığı hacim

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63{,}5\ g}{8{,}95\ g/cm^3} = 7{,}09\ cm^3$$

her atomdan bir elektron için

$$n = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{elektron}}{7{,}09\ cm^3}(1{,}00 \cdot 10^6\ cm^3/m^3) = 8{,}49 \cdot 10^{28}\ \text{elektron}/m^3$$

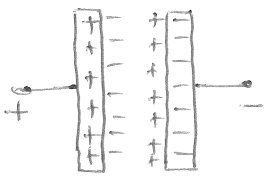
$$v_s = \frac{I}{nqA} = \frac{10\ C/s}{(8{,}49 \cdot 10^{28}\ m^{-3})(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C)(3{,}31 \cdot 10^{-6}\ m^2)} = 2{,}22 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

J. akım yoğunluğu, birim alan başına düşen akım olarak tanımlanır.

$$J = \frac{I}{A} = nqv_s \quad \left(\frac{A}{m^2}\right)$$

Dielektrik (Permittivite) Geçirgenlik

Elektrostatikte iki iletken levha arasında bulunan yalıtkan malzemeye dielektrik denir. Bu maddeler üç ayrı durumda bulunabilirler (örn: katı, sıvı, gaz gibi) Bu maddelerin yapıları ister kristal yapıya sahip olsun ya da olmasınlar genel özellikleri enerji depolayabilirler.



Yalıtkan maddelerin atom yapılarından dolayı, elektronlarını atomlar arası hareket ettirmek oldukça zordur. Şekildeki gibi elektronlar pozitif levha tarafından çekilirken, negatif levha tarafından da itilirler (Çünkü elektronların eliptik yörüngeleri pozitif levhaya doğru kayar) Böylece dielektriğin atomları polarizasyona (kutuplaşmaya) uğrar. veya bir başka deyişle dielektrik maddede yüzey şarjı meydana gelir.

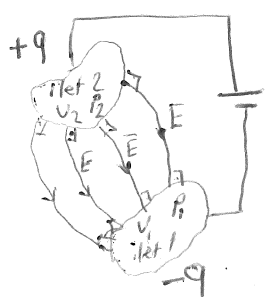
Eğer iki levhaya bağlı kaynak kaldırılıp iki nokta arasına bir voltmetre bağlanacak olursa bir potansiyel fark okunur. Oysa elektrik alanı kaldırılmıştır. Demek ki ölçülen potansiyel atomları eski durumuna dönmeyen dielektrik maddenin yüzey şarjının iletken levhaları yüklemesidir. Bu olaya dielektriğin absorbesi veya artık yükü denir.

Dielektrik maddenin delinmesi

Dielektrik madde belirli bir alan şiddetine kadar yalıtkanlık özelliği gösterir. Ancak, kritik alan değeri aşılınca delinerek iletken hale gelirler.

Bu kritik alan değerine delinme alan şiddeti (E_d) denir ve malzemenin cinsine sıcaklığına ve kalınlığına bağlıdır. Ayrıca, alanın düzgün olup olmamasına ve ~~zamanla~~ zamanla değişimine bağlıdır denebilir.

Kapasitörler



Şekildeki homojen bir dielektrik içerisine iki iletken bırakılmıştır. İletkenlerde eşit fakat zıt yükler bulunsun. Yükleri iletken yüzeylerinde biriktirdiğini ve elektrik alanının iletken yüzeye dik olduğunu biliyoruz. Akı pozitif iletkenden negatif iletkene doğrudur. İletkenlerin yükleri q olsun.

$$C\,(\text{kapasite}) = \frac{Q}{V}\left(\frac{C}{V}\right) \text{ veya } (F)$$

Q: Her bir iletken yükü (C)
V: İletkenler arası potansiyel (V)
C: Kapasite (F)

Farad: 1V potansiyel farkı altında, levhalar arasında 1C'luk yük toplanıyorsa kapasite 1 farad'dır.

Paralel düzlemli kondansatörlerde kapasite;

$$C = \frac{8.85 \cdot k \cdot S}{10^8\, d}$$

ε_r bağıl

$k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

MKS
C: Yük (Farad)
S: Levha yüzeyi (m^2)
d: Levhalar arası mesafe (m)

k: dielektrik katsayısı
ε: dielektrik maddenin geçirgenliği
ε_0: Boşluğun geçirgenliği

CGS
C: μF
$S = cm^2$
d = cm

8.p.

Pozitif levha üzerinde biriken yük gauss kanunundan faydalanılarak (sınır şartları dikkate alınarak) bulunur.

$$Q = \int_{yüzey} \vec{D}\, ds \qquad (1)$$

Üreteç tarafından uygulanan V gerilimi, iletkenlerin eş potansiyel yüzeylerinin P_1 ve P_2 noktaları arasındaki eğri boyunca, elektrik alanının integrali ile bulunur.

$$V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{l} \qquad (2) \qquad \text{ve} \quad D = \varepsilon . \vec{E} \text{ dir.}$$

İki formül uygulanılarak

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint \varepsilon E\, ds}{-\int^{+} E\, dl} = F$$

$$V = -\int_{üst}^{alt} E.dl = +\int_{alt}^{üst} 2\frac{\rho_s}{2\varepsilon}\, dz = \frac{\rho_s}{\varepsilon} . d$$

$$Q_s = \rho_s . S \qquad C = \frac{\rho_s . S}{(\rho_s/\varepsilon) d} = \frac{\varepsilon . S}{d}$$

Eğer ikiden fazla iletken sıfır homsu ise, her bir çiftin arasındaki kapasiteler şöt önüne alınır.

Bir kapasitede depolanan enerji

$$C = \frac{Q}{V}, \quad V = \frac{Q}{C}, \quad q = V.C$$

Ortalama potansiyel fark $= \frac{V}{2} = \frac{Q}{2C}$

Yapılan iş $W = Q . V_{ort} = Q\left(\frac{Q/C}{2}\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(V.C)^2}{2C} = \frac{1}{2} V^2 C$

Veya

$$dW = V.dq \quad \left(V = \frac{W}{Q}\right) \text{ dir}$$

Çünkü 0'dan Q değerine yüklemek için yandaki integral işlemi alınır.

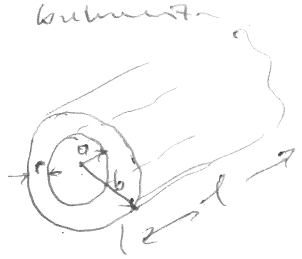
$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} V^2 C \text{ dir.}$$

Enerji yoğunluğu birim hacim için düşünülür.

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\varepsilon_0 S}{d}}_{C} \underbrace{E^2 d^2}_{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \underbrace{S d}_{hacim} E^2$$

Enerji yoğunluğu $\rho_w = \frac{W}{S.d} = \frac{1}{2 \cancel{S d}} \frac{\varepsilon_0 \cancel{S}}{\cancel{d}} E^2 \cancel{d^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \; J/m^3$ dür.

7) l_a yarıçapı a, dış yarıçapı b olan l uzunluğundaki koaksiyel kablonun kapasitesini bulunuz.



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{-\int E dr}$$

$$D = \varepsilon E$$

$$C = \frac{Q}{\int \frac{D}{\varepsilon} dr} = \frac{Q}{\int \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon} dr}$$

$$D = \frac{Q}{S} \qquad Q = \Psi = \int D\, ds$$

$$C = \frac{2\pi l \varepsilon}{-\int_b^a \frac{dr}{r}} = \frac{2\pi \cancel{l} \varepsilon}{-\ln r \Big|_b^a}$$

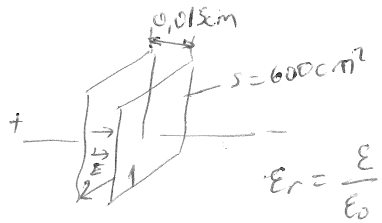
$$C = \frac{2\pi l \varepsilon}{\ln a - \ln b} = \frac{2\pi l \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \text{ Farad.}$$

Dielektrik Maddeler ε_r katsayısı

Hava	1,0006	kağıt	2,5
Seramik	7500	kauçuk	3
porselen	6	Teflon	2
Tr. yağı	4	Cam	6
Bakalit	7	Mika	5

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Ö 600cm² yüzeyli iki paralel plakadan yapılan kondansatörün dielektriği yağ emdirilmiş kağıttır. Dielektrik katsayısı 2,3 ve dielektriğin kalınlığı 0,015cm olduğuna göre kondansatörün kapasitesini bulunuz.



$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 2,3$$

$$V = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon} \Rightarrow E = 2\cdot\frac{\rho_s}{2\varepsilon} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

$$V = \frac{\rho_s}{\varepsilon}\cdot d \qquad Q_s = \rho_s \cdot S$$

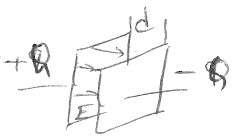
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s \cdot S}{\frac{\rho_s}{\varepsilon}\cdot d} = \frac{S}{\frac{1}{\varepsilon}d} = \frac{S\,\varepsilon}{d} = \frac{S\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}{d} = \frac{600\cdot10^{-4}\cdot 2,3\cdot 8,85\cdot10^{-12}}{0.015\cdot10^{-2}}$$

$$C = 8,14\cdot10^{-9}\,F \qquad C = 8.14\cdot10^{-3}\,\mu F$$

Ö dünde hava bulunan paralel plakalı bir kondansatörün plaka alanı 40cm² plaka aralığı ise 1mm dir. Eğer uçlarına 600V potansiyel fark uygulanırsa

a) Sığayı b) Her iki plakadaki yük miktarını c) depolanan enerji miktarını

d) Plakalar arasındaki elek. alanını et Plakalar arasındaki enerji yoğunluğunu bulunuz



a) $= C = \frac{S\varepsilon}{d} = \frac{(8.85\cdot10^{-12})40\cdot10^{-4}}{1\cdot10^{-3}} = 35\,pf$ b) $Q = C\cdot V = 35\cdot10^{-12}\cdot 600 = 21\cdot10^{-8}\,C$

c) $= W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(35\cdot10^{-12})\cdot 600^2 = 6,3\cdot10^{-6}\,J$

d) $E_t = 2\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{S\varepsilon_0 1} = \frac{2.1\cdot10^{-8}}{(40\cdot10^{-4})(8.85\cdot10^{-12})} = 5,9\cdot10^{5}\,\frac{V}{m}$ $\left(\rho_s = \frac{Q}{S}\right)$

e) $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}(8.85\cdot10^{-12})\cdot(5.9\cdot10^{5})^2 = 1,6\ J/m^3$ olur.

$W = V\cdot Q$

$dW = \frac{q}{C}\,dq$

$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq$

$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq$

$= \frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2}\Big|_0^Q$

$= \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Kondansatörde depolanan enerji

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\varepsilon_0 S}{d}}_{C}\cdot \underbrace{E^2 d^2}_{V^2}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\cdot d E^2$$

$$dW = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S d E^2}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \left(\frac{J}{m^3}\right)$$

Hacim başına enerji yoğunluğu

Ör. Eş merkezli küreler arasındaki sığa

İç çapı a, dış çapı b olan iç içe geçmiş küresel iletken kabuklardan oluşmuş kapasitörün sığasını bulunuz.

$D = \frac{Q}{S}$

$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ dir.

$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

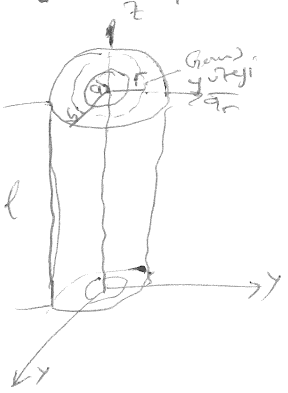
$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab}{k(a-b)}$

$V_{ab} = -\int_{ust}^{alt} (Q/4\pi\varepsilon r^2)\, dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r^2}$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^a r^{-2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{r^{-2+1}}{1}$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\Big|_b^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

Ör Eş eksenli silindirik kapasitenin değerini bulun.



Gauss yasasına göre

$\bar{D} = \frac{\rho_s 2\pi a l}{2\pi r l} a_r = \rho_s \frac{a}{r}\bar{a}_r$

$V_{ab} = -\int_b^a \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0\varepsilon_r r}\, dr\, \bar{a}_r$

$= \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$

$\cancel{E = \varepsilon D} \Rightarrow E = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0\varepsilon_r r} a_r$

$E = \frac{\rho}{\varepsilon}$

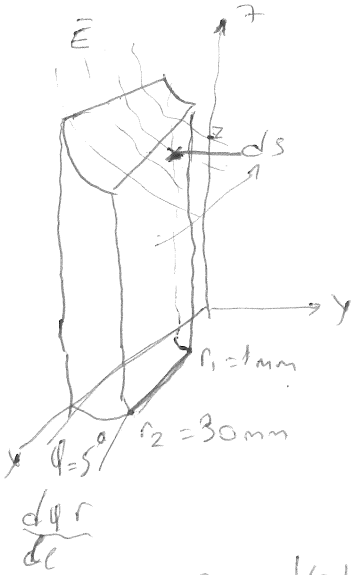
İç iletkenin toplam yükü

$Q = \rho_s(2\pi a . l)$ $\quad C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln(b/a)}$

x-- den kurtarmak için b-a alındı

$= \frac{2}{2}\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{4\pi\varepsilon l}{2\ln\frac{b}{a}} = \frac{l}{2k\ln\frac{b}{a}}$

Ö Radyal yapıdaki kapasitenin ε_r değeri 4,5 olup kapasite değerini bulunuz.



$ds = dz . dr$

$V_{ab} = -\int_b^a E\, dl$ $\quad D = \varepsilon E \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon}$ ve $\Phi = \int \bar{D}\, ds \Rightarrow \bar{D} = \int \frac{Q}{ds}$

$V_{ab} = -\int_b^a \frac{\bar{D}}{\varepsilon} dl = -\int_b^a \frac{\bar{D}}{\varepsilon} r\, d\varphi$

$V_{ab} = -\frac{\bar{D}}{\varepsilon} r \int_0^\varphi d\varphi = -\frac{\bar{D}}{\varepsilon} r\varphi \Rightarrow \bar{D} = \frac{V_{ab}.\varepsilon}{r\varphi}$

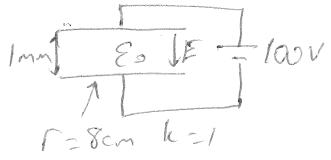
$Q = \int \rho_s\, ds = \int \bar{D}\, ds = \int_a^b \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_{ab}}{r\varphi} dr\, dz$

$Q = \frac{V_{ab}\varepsilon_0\varepsilon_r}{\varphi} = \int_0^5 dz \int_1^{30} \frac{dr}{r} = \frac{V_{ab}\varepsilon_0\varepsilon_r}{\varphi} . z . \ln r$

$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_{ab}}{\varphi} z \ln r / V_{ab} = \frac{8.85.10^{-12}.4.5.5.10^{-3}}{0,087} 3.4 = 7,7\ F.$

$\frac{5.\pi}{150}$:

Q Hava dielektrik malzemeli 8cm yarıçaplı paralel yapılı kondansatörde plaka aralığı 1mm ve uygulama plaka gerilimi 100V ise toplanan yük miktarını bulunuz.



$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \frac{8.85.10^{-12}((\pi.8^2.10^{-2})^2}{1.10^{-3}} = 1.77.10^{-10} F$$

$$Q = V.C = 100.1.77.10^{-10} = 1.77.10^{-8} C$$

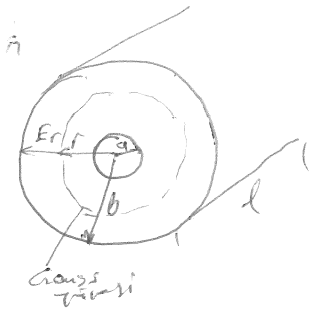
Q İçi hava dolu paralel plakalı kondansatörün sığası 50pF

a) Plaka alanı $0.35 m^2$ ise d nedir.

b) k (ε_r) sabiti 5,6 olan bir dielektrik ile plakaların arası doldurulursa sığa ne olur.

a) $C = 50pF$, $\varepsilon_r = 1$, $S = 0.35 m^2$ $\quad C_0 = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} \Rightarrow d = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{C_0} = \frac{1.8.85.10^{-12}.0.35}{50.10^{-12}} = 0,06 mm$

b) $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 = 5.6.50 = 280pF$ olur



Enerji taşıyan bir koaksiyel kablo için iç çap = 0,1mm, dış çap: 0,6 mm dir. Bu iletken için birim uzunluk düşünülerek sığayı bulunuz. (dielektrik malzeme poliyester $\varepsilon_r = 2.6$)

$$Q = \oint D.ds \qquad E = \frac{D}{\varepsilon}$$

$$D = \frac{2\pi a l \rho_s}{2\pi r l} = \frac{\rho_s a}{r} \Rightarrow E = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r}$$

$$Q = \rho_s ds = \rho_s (2\pi a l)$$

$$V = -\int_b^a \bar{E} d\bar{l} = -\int_b^a \bar{E} d\bar{r} = -\int_b^a \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r} dr = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_0^a \frac{dr}{r} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s ds}{\frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi a l \varepsilon_0 \varepsilon_r}{a \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi l.8.85.10^{-12}.2.6}{\ln \frac{b}{a}} = 80.3 l \; pF$$

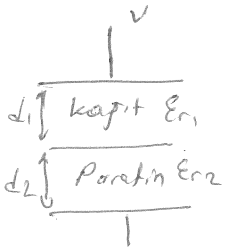
Birim uzunluk için $\frac{C}{L} = \frac{80.3 l}{1} = 80.3. pF/m$

Q Eş merkezli iki içice küreden oluşan kapasitör için a ve b yarıçaplardır. İç kürenin yükü +q dış küre ise −q dur. Kapasite değerini bulunuz.

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2} \bar{a}_r \qquad V_{ab} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{(Q/4\pi\varepsilon)(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} = \frac{4\pi\varepsilon.a.b}{b-a} \text{ bulunur}$$

Q:



Bu kapasitenin dayanabileceği en büyük gerilimi bul.

$\varepsilon_{r1} = 6$

$E_k = 2.10^5$ V/m

$d_1 = 2$ mm

$E_p = 3.10^5$ V/cm

$d_2 = 3$ mm

$\varepsilon_{r2} = 2.2$

Bu şartlarda max. dayanma gerilimini bulunuz

$\bar{D}_1 = \varepsilon_1 \bar{E}_1 = 6.\varepsilon_0 2.10^7$ V/m

$\bar{D}_2 = \varepsilon_2 \bar{E}_2 = 2.2.\varepsilon_0 3.10^7$ V/m

$\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$

$E_k = 2.10^5$ V/cm $= 2.10^7$ V/m

E_2 bilinmiyor kabul edersek $2.2.\cancel{\varepsilon_0}.E_2 = 6.\cancel{\varepsilon_0}.2.10^7$ yazılır.

ve $E_2 = \frac{12}{2,2}.10^7 = 5.45.10^7$ V/m bulunur. $E_2 > E_p$ delinir.

E_1 bilinmiyor kabul ederek $2.2.\varepsilon_0 3.10^7 = 6.\varepsilon_0 E_1$ yazılır

ve $E_1 = \frac{2.2.3.10^7}{6} = 1.1.10^7$ V/m bulunur. $E_1 < E_k$ dayanır.

$V_k = E_k d_k$, $V_k = 1.1.10^7$ V/m $.\ 2.10^{-3}$ m $= 2,2\ 10^4$ V

$V_p = E_p d_p$, $V_p = 3.10^7$ V/m $.\ 3.10^{-3}$ m $= 90.10^3$ V

$V_T = V_1 + V_2 = 22$ kV $+ 90$ kV $= 112$ kV bulunur.

Bazı maddelerin delinme gerilimleri (V/cm)

Madde	E_{max} (V/cm)
Hava	3.10^4
Yağ	$1.5.10^5$
kaşit	2.10^5
Porselen	2.10^5
Cam	3.10^5
Mika	2.10^6
kuartz	2.10^6

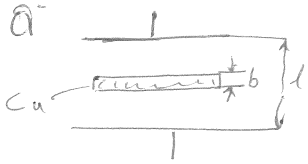
$E_n = \frac{V_n}{d_n}$

$E_n > E_{max}$ için delinme sağlanmamalıdır.

$E_n = \frac{V_T}{\varepsilon_n\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \cdots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}\right)}$

Çok katlı dielektrik sıpalar.

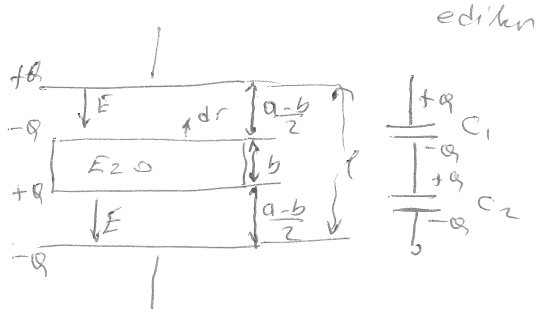
a)



plakaların tam ortasında b kalınlığında iki ucu açık bakır bir maşpeme konuluyor

a) işlem sonrası kapasiteyi bul

b) Plakalar Q yükü ile yüklendiğinde ve plakalar veplakalarında depo ediken enerjileri bul



$a=1$ a) $V_1 = -\int_0^{\frac{l-b}{2}} E\,dr = \int \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,dr$

$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \Big| \quad 1.\ \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = \frac{Q/S}{\varepsilon_0}$

$$V_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,\frac{l-b}{2}$$

$$C_1 = \frac{Q}{V_1} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{l-b}{2}\right)} = \frac{2\varepsilon_0 S}{l-b} = C_2$$

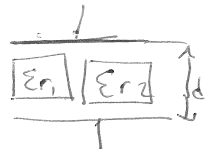
b) Bakırsız sıpa

$C_0 = \varepsilon_0 S/l \qquad W_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{l}{2\varepsilon_0 S}\cdot Q^2$

Bakırlı

$C_T = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{l-b} \qquad W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_T} = \frac{l-b}{2\varepsilon_0 S}Q^2$ olur.

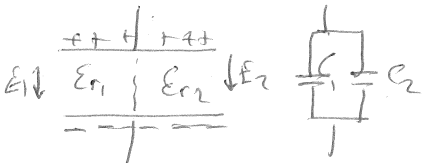
c)



Yük yoğunluğu Q_1 ve Q_2 olsun

$E_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad E_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$

$V_1 = E\,d = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\,d \qquad V_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}\,d$



$C_1 = \frac{Q_1\, S/2}{V_1} = \frac{Q_1\, S/2}{Q_1\, d/\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d}$

$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}{2d} \qquad C_T = C_1 + C_2$

d) Kesiti verilen iç içe geçmiş iki silindirin eş merkezli olduğu biliniyor a=1,5mm b=18mm ve her iki yüzey 2,3cm uzunluğunda ise sığayı bul.

$D = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi r l} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q/S}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0}$

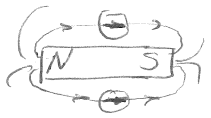
$V_b = \int_a^b E\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$

$C = \frac{Q}{V_b - V_a} = \frac{Q}{(Q/2\pi\varepsilon_0 l)\ln\frac{b}{a}} = \frac{2}{2}\,\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{l}{2k\ln\frac{b}{a}} \qquad \Big| \; k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$= \frac{2,3\cdot 10^{-2}}{2\cdot 9\cdot 10^{9}\ln 18/1,5} = 0,5\cdot 10^{-12}\,F = 0,5\,pF$

Manyetik Alan

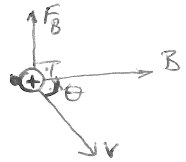
Yüklü cisimler arasındaki etkileşim elektrik alanları ile tanımlanır. Her hangi bir hareketli elektrik yükünün çevresindeki uzay bölgesi elektrik alanına ek olarak bir de manyetik alan içerir. Bir manyetik maddeyi de saran bir manyetik alan vardır. Manyetik alan $\vec{B}$ ile gösterilir. Her hangi bir $\vec{B}$ manyetik alanının yönü oraya konan pusulanın gösterdiği yöndür. N'den S'e doğru malzemenin dışında.

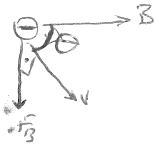


Uzayın bir noktasındaki $\vec{B}$ manyetik alanını, orada bulunan bir deneme cismine alanın uyguladığı F_B manyetik kuvveti cinsinden tanımlanabilir. Deneme cismi $\vec{V}$ hızıyla hareket eden yüklü bir parçacık olarak tanımlanabilir. Yükün bulunduğun bölgede hiçbir elektrik alan ve yerçekimi olmadığını varsayıyoruz. Bir manyetik alanda hareket eden yüklü parçacıkların hareketleri ile ilgili deneysel sonuçlardan

- Parçacığa etkiyen manyetik kuvvetin büyüklüğü F_B, parçacığın hızı v, ve q yükü ile orantılıdır.
- F_B manyetik kuvvetinin büyüklüğü ve yönü, parçacığın hızına ve $\vec{B}$ manyetik alanının büyüklüğü ve yönüne bağlıdır.
- Yüklü parçacık manyetik alana paralel hareket ederse $F_B = 0$ dır.
- Parçacığın hız vektörü alanla $\theta \neq 0$ açısı yaptığından F_B hem $\vec{V}$'ye hem de $\vec{B}$'ye diktir.
- Pozitif yüke etkiyen kuvvet negatif yüke etkiyenle terstir.
- v ve B arasındaki açı θ için kuvvetin büyüklüğü $\sin\theta$ ile orantılıdır.

$$\vec{F_B} = q\vec{V} \times \vec{B}$$





$$|F_B| = F_B = |q|\, v B \sin\theta$$

Elektrik alanı ve manyetik alan arasındaki farklar.

- Elektrik kuvveti elektrik alanına paraleldir. Manyetik kuvvet manyetik alana diktir.
- Elektrik kuvveti parçacığın hızından bağımsızdır. Manyetik kuvvet parçacık hareketli ise etkiyecek
- Elektrik kuvveti parçacığın konumunu değiştirerek iş yapar. Manyetik kuvvet parçacık yer değiştiğinde iş yapmaz.

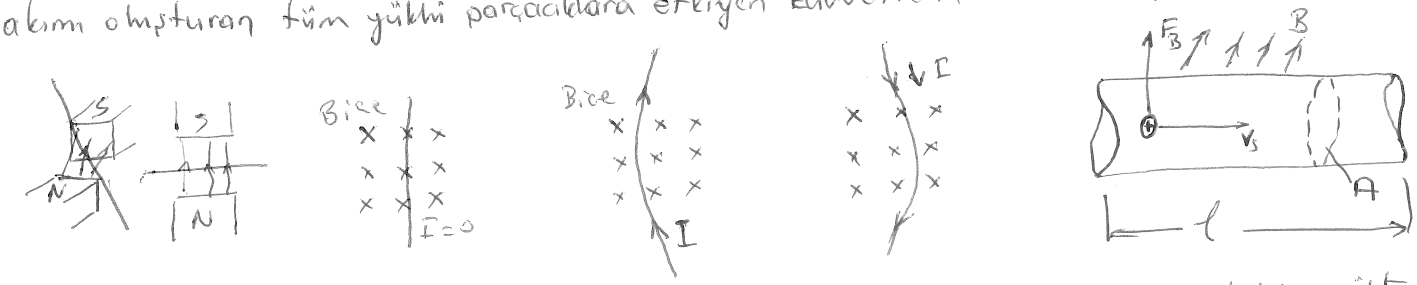
V hızıyla hareket eden yüklü uygulanan manyetik alan onun hız vektörünün yönünü değiştirebilir fakat hızın büyüklüğünü veya kinetik enerjisini değiştiremez.

Manyetik alanın birimi Coulomb-metre/saniye başına Newton dur. Tesla denir.

$$1T = \frac{N}{C\,m/s} \qquad 1T = 10^4 \text{ Gauss} \qquad \frac{C}{s} = \text{Amper} \Rightarrow 1T = \frac{N}{A.m}$$

Akım taşıyan iletkene etkiyen Manyetik Kuvvet

Akım çok sayıda yüklü parçacıktan oluşmaktadır. Bu durumda tele etkiyen net kuvvet akımı oluşturan tüm yüklü parçacıklara etkiyen kuvvetlerin vektörel toplamıdır.



+q'ya etkiyen kuvvet $q\bar{V}_s \times B$'dir. teldeki yüklerin hepsine etkiyen kuvvet için yükt sayısı ile kuvvet çarpılır. Parçanın hacmi $A.\ell$ için yük sayısı $nA\ell$'dir.

n birim hacimdeki yük sayısıdır.

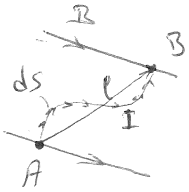
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nqV_sA \qquad \Delta x = V_s \Delta t$$

$$\bar{F}_B = (q\bar{V}_s \times \bar{B})\, nA\ell \quad \text{olur.} \quad I = nqV_sA \text{ için}$$

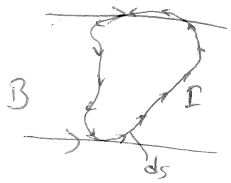
$$\bar{F}_B = I.\bar{\ell} \times \bar{B}$$

$\bar{\ell}$, I yönünde vektördür.

$$dF_B = I\, ds \times B \Rightarrow F_B = I\int_0^b ds \times B$$



$$F_B = I\left(\int_a^b ds\right) \times B = I\,\ell \times B$$



$$F_B = I\left(\overbrace{\oint ds}^{0}\right) \times B = 0$$

Düzgün bir manyetik alan içindeki herhangi bir kapalı akım ilmeğine etkiyen net manyetik kuvvet sıfırdır.

Manyetik alan kaynakları

Biot-Savart Yasası Uygulamadaki

I akım taşıyan bir telin bir ds uzunluk elemanının P noktasında oluşturduğu $d\bar{B}$ manyetik alanı için deneysel gözlemlerle aşağıdaki sonuçlar görülür.

- $d\bar{B}$ vektörü hem ds (akım yönünde) hemde ds'den P'ye yöneten $\bar{r}$ birim vektöre diktir.
- $d\bar{B}$'nin büyüklüğü r^2 ile ters orantılıdır.
- $d\bar{B}$'nin büyüklüğü I ve ds ile orantılıdır.
- $d\bar{B}$'nin büyüklüğü $\sin\theta$ ile orantılıdır. θ, ds ve $\bar{r}$ arasındaki açıdır.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, ds \times \bar{r}}{r^2} \qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ T.m/A\ (H/m) \text{ boşluğun geçirgenliği}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{ds \times \bar{r}}{r^2} \qquad T = N/Cm/s \quad \Big| \quad Tm/A = \frac{N}{\frac{Cm}{s}} \cdot \frac{m}{\frac{C}{s}}$$

Biot-Savart Yasası

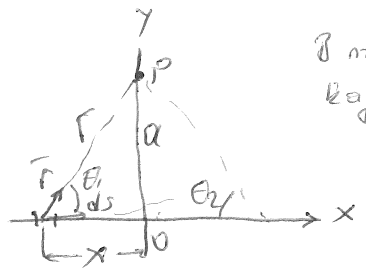
Kararlı bir I akımı taşıyan bir iletkenin bir $d\bar{s}$ uzunluk elemanının P noktasında oluşturduğu $d\bar{B}$ manyetik alanı arasındaki ilişki

- $d\bar{B}$ vektörü $d\bar{s}$'ye ve $d\bar{s}$-P yönündeki $\bar{r}$ vektörüne diktir.
- $d\bar{B}$ büyüklüğü r^2 ile ters orantılıdır.
- $d\bar{B}$ ds ve akımla orantılıdır.
- $d\bar{B}$ nin büyüklüğü $d\bar{s}$ ve $\bar{r}$ vektörleri arasındaki açı (θ) için $\sin\theta$ ile orantılı

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\bar{s}\times\bar{r}}{r^2}$$ - birim vektör

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\bar{s}\times\bar{r}}{r^2}$$

Ö



B manyetik alanı kağıt düzleminden dışarı doğrudur.

k → dışa doğru birim vektör.

$$d\bar{s}\times\bar{r} = \bar{k}|d\bar{s}\times\bar{r}| = k\, dx\sin\theta,$$

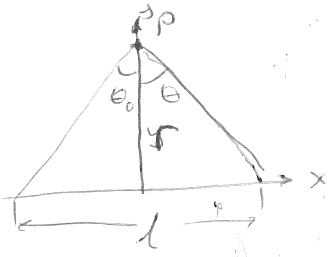
$$d\bar{B} = dB\,k = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sin\theta}{r^2}\cdot k$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sin\theta}{r^2} \qquad r = \frac{a}{\sin\theta} = a\cdot\csc\theta \qquad \tan\theta = a/(-x) \Rightarrow x = -a\cot\theta$$

$$dx = a\csc^2\theta\, d\theta \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\csc^2\theta\sin\theta\, d\theta}{a^2\csc^2\theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\, d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

0 → π değişir.



$E = 2k\rho_l\sin\theta_0/r$

Sonsuz tel için

$E = 2k\rho_l/r$

$x = y\tan\theta \qquad dx = y\sec^2\theta\, d\theta$

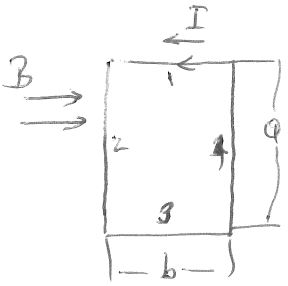
$\rho_l = \frac{Q}{l}$

$$E = k\int\frac{dQ}{r^2} = k\rho_l\int\frac{dx}{r^2}$$

$$\frac{l}{a(a+l)^{1/2}}$$

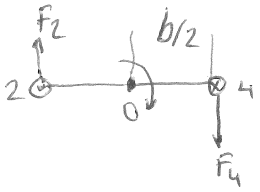
$\frac{x}{r} = \sin\theta$

Düzgün bir manyetik alan içerisindeki bir akım ilmeğine etkiyen Tork



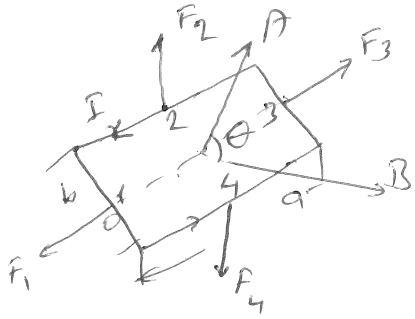
$F_1 = F_3 = ILXB = 0$

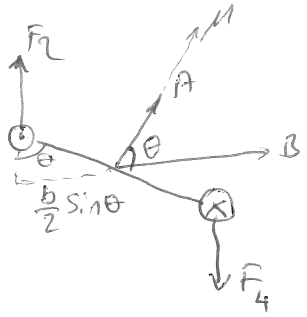
$F_2 = F_4 = IaB$



$T_{max} = F_2\frac{b}{2} + F_4\frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = I\underbrace{ab}_{Alan}B$

$T_{max} = IAB$





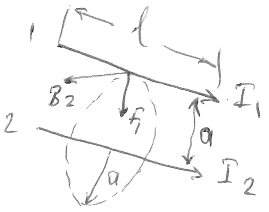
F_1 ve F_3 aynı başlangıç noktasından geçtiği için birbirini yok eder. F_2 ve F_4 kuvvetleri bir çift oluşturur. Bunun için herhangi bir noktaya göre torkları vardır. F_2 ve F_4'ün moment kolları $b/2 \sin\theta$ dır.

$F_2 = F_4 = IaB$ olduğundan 0'a göre tork

$$\tau = F_2\frac{b}{2}\sin\theta + F_4\frac{b}{2}\sin\theta = IaB\frac{b}{2}\sin\theta + IaB\frac{b}{2}\sin\theta$$

$$= IabB\sin\theta = IAB\sin\theta \text{ olur.}$$

İki Paralel İletken arasındaki Manyetik kuvvet



$$F_1 = I_1 l B_2 = I_1 l \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l$$

birim uzunluğa etkiyen kuvvet $\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$

Amper: Aralarındaki uzaklık 1m olan iki uzun, paralel telin taşıdıkları akımlar özdeş olduğunda, birim uzunluklarına etkiyen kuvvetin büyüklüğü 2.10^{-7} N/m ise tellerden geçen akımlar birer Amper (A) dir.

Coulomb: Bir iletken 1A'lik akım taşırken, iletkenin bir kesitinden 1s'de geçen yük 1C'dur.

Ampère Yasası

$\vec{B}.\vec{ds}$ çembersel yol üzerindeki ds'lerin toplamını alalım. Bu yolda $\vec{B}$ ve $\vec{ds}$ paraleldir. Bu nedenle $\vec{B}.\vec{ds} = B.ds$ olur.

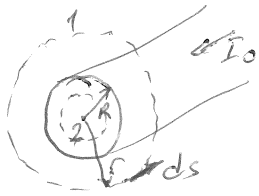
$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ dir. $\oint B\,ds = B\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.2\pi r = \mu_0 I$ olur.

Herhangi bir kapalı yol çevresinde $B.ds$'nin çizgi integrali $\mu_0 I$'ya eşittir.

I; kapalı yolun çevrelediği herhangi bir yüzeyden geçen toplam süreklı akımdır.

$$\oint B.ds = \mu_0 I$$

Ö kesitinin her tarafına düzgün dağılmış kararlı bir I_0 akımı taşıyan R yarıçaplı uzun ve doğrusal bir tel veriliyor. $r \geq R$ ve $r < R$ bölgelerinde telin merkezinden r uzaklığındaki noktalarda manyetik alanı hesaplayınız.



1. nolu çember için:

B'nin büyüklüğü sabit ve yönü ds'ye paraleldir.

Toplam akım I_0 olduğuna göre Ampere yasasından

$$\oint B.ds = B\oint ds = B\,2\pi r = \mu_0 I_0 \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r \geq R$$

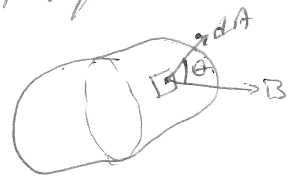
Simetrik durumlarda Biot-Savart yasasından daha kullanışlıdır.

2. nolu çember için: $\frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow I = \frac{r^2}{R^2} I_0$ $\left(J = \frac{I_0}{\pi R^2}\right.$ dir$\left.\right)$

$$\oint B.ds = B(2\pi r) = \mu_0 I = \mu_0\left(\frac{r^2}{R^2} I_0\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} r \quad r < R \text{ için}$$

$I = J\pi r^2 = \frac{I_0}{\pi R^2}.\pi r^2 = I_0 \frac{r^2}{R^2}$ olur. 2. yol

Manyetik Akı



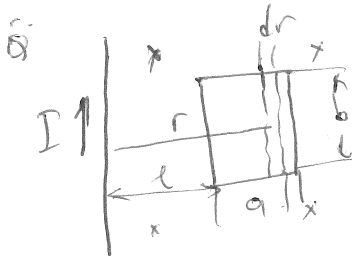
Toplam akı

$$\Phi_B = \int B \cdot dA$$

dA alanından sınırlı yüzeyden geçen manyetik alan B ise akı $d\Phi = B\,dA$

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\theta$$

Birim $T \cdot m^2$ (Weber) $\quad 1\,Wb = 1\,Tm^2$ dir.



Dik dörtgen bir ilmekten geçen manyetik akı tel deki akımın ilmekten geçirdiği toplam manyetik akıyı bulur.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ idi.}$$

İlmek içinde $B \parallel dA$ dır.

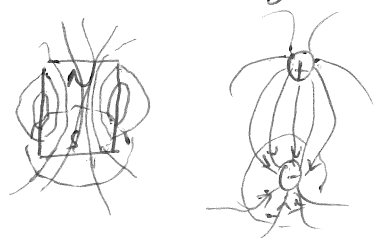
$$\Phi = \int B\,dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,dA \qquad dA = b\,dr \text{ dir.}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_l^{a+l}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln r\Big|_l^{a+l} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{a+l}{l}\right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{l}\right)$$

Manyetizmada Gauss yasası

Herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net manyetik akı sıfırdır.

$$\oint B \cdot dA = 0$$



$$\oint D \cdot ds = Q \quad \text{veya} \quad \oint E\,ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Yer değiştirme akımı

P S₁'i çevrelerse $\oint B \cdot ds = \mu_0 I$ olur

P S₂'yi " $\oint B \cdot ds = 0$ olur.

$$\Phi_E \equiv \Psi$$

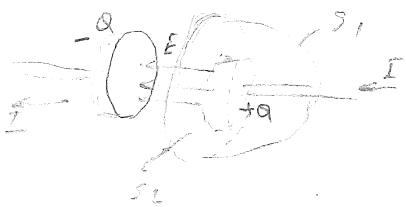
Yer değiştirme akımı $\cdot\; D_d = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} \qquad \Phi_E = \int E\,dA$

Ampere-Maxwell yasası

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Bu formülasyonun cazaba noktası

manyetik alanları, hem iletim akımları, hem de zamanla değişen elektrik alanlarının oluşturabilir olmasıdır.



S_2 den geçen elektrik akısı

$$\Phi_E = \int E\,dA = EA$$

A yüzeyinin büyüklüğüdür.

Q herhangi bir anda plakalar daki yük ise $E = Q/\varepsilon_0 A$

Buna göre S_2 den geçen elektrik akısı

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

S_2'den geçen yer değiştirme akımı

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Yani S_2 den geçen yer değiştirme akımı, S_1 den geçen iletim akımı I'ye tam olarak eşittir.

S_2 yüzeyini inceleyerek yer değiştirme akımını, yüzey sınırındaki manyetik alanın kaynağı olarak yorumlanabilir. Yer değiştirme akımının fiziksel kaynağı ise zamanla değişen elektrik alandır.

Mıknatıslanma vektörü ve manyetik alan şiddeti

Bir maddenin manyetik durumu mıknatıslanma vektörü (M) ile tanımlanır. Bu vektörün büyüklüğü, maddenin birim hacminin net manyetik momentine eşittir. Bir maddedeki toplam manyetik Alan B = dış manyetik alan B_0 ve maddenin mıknatıslanmasına bağlıdır.

$B = B_0 + B_m$ B_m manyetik maddenin oluşturduğu alan $B_m = \mu_0 M$ dir.

$B = B_0 + \mu_0 M$

Manyetik Alan şiddeti H mıknatıslanmadan bağımsız manyetik alanları tanımlarken kullanılabilecek bir büyüklüktür. Manyetik alan şiddeti tellerdeki iletim akımlarının maddeye etkisini temsil eder. B ile H arasında bi farkı vurgulamak için B'ye manyetik akı yoğunluğu denir.

$H = \frac{B_0}{\mu_0} = B/\mu_0 - M$ ile tanımlanan vektördür

$B = \mu_0 (H + M)$ H ve M birimi birim hacimdeki manyetikmoment $Am^2/m^3 = A/m$ dir.

Toroid için içi boş ise $M = 0$ ve $B = B_0 = \mu_0 H$ olur.

$B_0 = \mu_0 n I$ olur. $(n = N/l)$ $H = B_0/\mu_0 = \mu_0 n I/\mu_0 = nI$ olur.

Bu durumda toroidin içindeki B manyetik alanı, sadece sarımlardan geçen akımdan ilerilemiştir.

Manyetik maddelerin sınıflandırması

Paramanyetik ve ferromanyetik maddelerde sürekli (daimi) manyetik dipol momente sahip atomlardan oluşur. Diamanyetik maddeler manyetik dipol olmayan atomlardan oluşur.

Paramanyetik ve ferromanyetik lerin mıknatıslanma vektörleri M

$M = \chi H$ tir χ manyetik duyarlılıktır.

madde paramanyetikise χ pozitif (M ve H aynı yönde)

" diamanyetik " χ negatif (M ve H zıt yönlü)

ferromanyetiklerde lineer ilişki yoktur.

$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (H + \chi H) = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_m H$; $\mu_m = \mu_0 (1 + \chi)$

$\mu_m > \mu_0$ paramanyetik

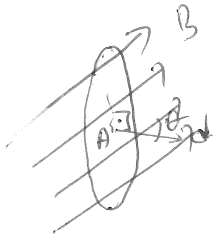
$\mu_m < \mu_0$ Diamanyetik

① Faraday'ın indüksiyon kanunu

Devreden geçen manyetik akı zamanla değiştiğinde devrede bir emk oluşur. İndüklenmiş akımın emk'sini ifade eden Bir devrede indüklenen emk, devreden geçen manyetik akının zamana göre türevi ile doğru orantılıdır. Bu faraday'ın indüksiyon yasasıdır.

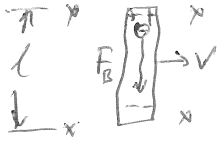
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \Phi_B = \int B \cdot dA \text{ manyetik akı}$$

N sarım için $\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt}$



$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(B.A\cos\theta) \text{ olur.}$$

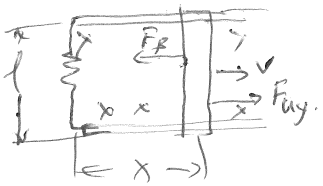
Hareketsel emk



$F_e = F_B$ olur oyle kadar devam eder

$qE = qvB$

$E = vB$ olur. Dengede $\Delta V = El = Blv$ olur.



herhangi bir andaki alan lx için manyetik akı

$$\Phi_B = Blx \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -Blv \text{ olur.}$$

Lenz yasası

İndüksiyon emk'sının yönü akım ilmeğinin çevrelediği alandan geçen manyetik akı değişimine karşı koyacak şekilde manyetik akı oluşturan akımın yönündedir.

Öz indüksiyon

Manyetik akının zamanla değişimin hatırlanır reportiki yönde indüksiyon emk'sı oluşur. Manyetik akı kaynak akımından ileri gelen manyetik alanla orantılı ve dolayısıyla kaynak akımı ile orantılıdır

Buradan ile $V_L = \mathcal{E}_L$ öz-indüksiyon akımı daima akımın zamana göre değişim hızıyla orantılıdır.

$$V_L = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

L: devrenin indüktansı

$$L = \frac{N\,d\Phi}{I} \text{ olur.}$$

Birim $\frac{V.s}{A}$ = Henry

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt}$$

Ör. 300 sarımlı, 25cm uzunluğa sahip bir solenoidin kesiti 4 cm² ise a) indüktansı ve (b) akım 50A/s hızla azalıyorsa $\mathcal{E}_L$=?

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad \left| B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I \right. \quad \left| L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \right\} \text{ veya } N = n.l$$

$$L = \frac{4\pi 10^{-7}\cdot 300^2\cdot 4\cdot 10^{-4}}{25\cdot 10^{-2}} = 0.181\,mH \qquad \Phi = B.A = \mu_0\frac{NA}{l}\cdot I$$

$$L = \mu_0\frac{(nl)^2}{l}A = \mu_0 n^2 V \text{ hacim}$$

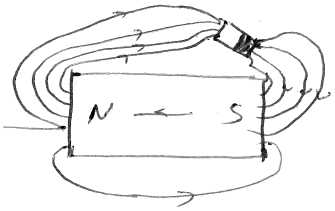
b) $\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -1.81\cdot 10^{-4}\cdot -50 = 9.05\,mV$

m.ş

3- Kuvvet çizgilerinin boylarının uzaması gerilme kuvvetini arttıracağından kısalmak isteyecekterdir.

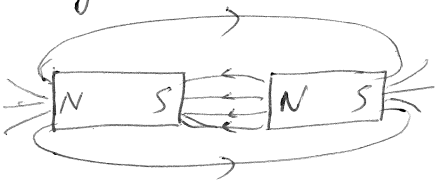
4- Kuvvet çizgileri kutuplardan uzaklaştıkça birbirlerinden uzaklaşırlar. Tersine kutuplara yaklaştıkça da birbirlerine yaklaşırlar ve paralel olurlar.

5- Kuvvet çizgileri birbirlerini iterler. Böylece de kesişmezler.

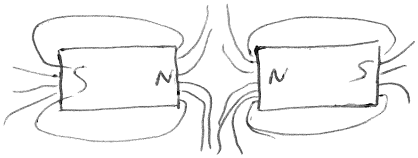
6- 

Manyetik alan içerisine bırakılan bir demir parçasından geçebilmek için kuvvet çizgileri normal yönlerini değiştirebilirler. Çünkü, demir havaya göre daha iyi bir manyetik malzemedir.

7. Aynı kutuplar birbirlerini iterken farklı kutuplar birbirini çekerler.



çekme



itme

Manyetik Malzemelerin Sınıflandırılması

İçerisi boş bir nüve bobininden akım geçirildiğinde bobinin oluşturacağı manyetik alanın etkisi ile bazı manyetik malzemelerin nüve içerisine çekildiği, bazılarının dışa itildiği görülür. Bu durum manyetik malzemelerin sınıflandırılmasına yardım eder.

a) Malzemeye zayıf bir kuvvet uygulayarak itme gerçekleşiyorsa DİAMANYETİK malzemeler (Organik ve inorganikler, cam, altın)

b) Manyetik malzemeye zayıf bir çekme kuvveti uygulanırsa PARAMANYETİK (Alüminyum, hava, magnezyum)

c) Çok güçlü bir çekme kuvvetine maruz kalan malzemeler ise FERROMANYETİK (Paramanyetiklerden 5000 kat daha güçlü) demir, kobalt, nikel, demir gibi

— Antimanyetik (anti ferro): dış alanlardan en az etkilenirler. (NiO, $CaCl_2$ gibi)

— ferrimanyetik: Ferromanyetiklerin zayıf olanlarıdır. (ferritler)

— Süpermanyetik: Video veya audio kayıt başlıklarında kullanılan malzemelerdir.

Bazı malzemelerin Bağıl Geçirgenlikleri (μ_r)

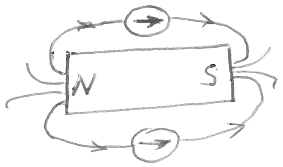
Ferromanyetik	μ_r
Kobalt	250
Nikel	600
Ticari demir	6000
Saf demir	2.10^5
Mumetal (Demir + Nikel + krom) %20 %78 %2	10^5

Paramanyetik	μ_r
Alüminyum	1,000021
Magnezyum	1,000012
Titanyum	1,00018
Hava	$3.6 \cdot 10^{-7}$
Boşluk	1

Diamanyetik	μ_r
Bizmut	0,99983
Altın	0,999964
Gümüş	0,99998
Bakır	0,999991
Su	0,99991
Cam	

Manyetik Alan

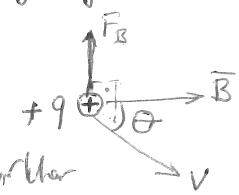
Yüklü cisimler arasındaki etkileşim elektrik alanları ile tanımlanır. Herhangi bir hareketli elektrik yükünün çevresindeki uzay bölgesi elektrik alanına ek olarak birde manyetik alan içerir. Manyetik alan $\bar{B}$ ile gösterilir. Herhangi bir $\bar{B}$ manyetik alanının yönü oraya koyulan pusulanın gösterdiği yöndür. Malzemenin dışında N'den S'e doğrudur.

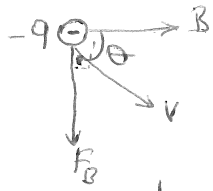


Uzayın bir noktasındaki $\bar{B}$ manyetik alanını, orada bulunan bir deneme cismine alanın uyguladığı F_B manyetik kuvvet cinsinden tanımlanabilir. Deneme cismi $\bar{V}$ hızıyla hareket eden yüklü bir parçacık olarak tanımlanabilir. Yükün bulunduğu bölgede hiçbir elektrik alan ve yer çekimi olmadığını varsayarak. Bu manyetik alanda hareket eden yüklü parçacıkların hareketleri ile ilgili deneysel sonuçlardan.

- Parçacığa etkiyen manyetik kuvvetin büyüklüğü F_B, parçacığın hızı V ve q yükü ile orantılıdır.
- Yüklü parçacık manyetik alanın paralel hareket ederse $F_B = 0$ dır.
- Parçacığın hız vektörü alanla $\theta \neq 0$ açısı yaptığında F_B hem V'ye hemde B'ye diktir.
- Pozitif yüke etkiyen kuvvet negatif yüke etkiyenle terstir.
- V ve B arasındaki açı θ için kuvvetin büyüklüğü $\sin\theta$ ile orantılıdır.

$$\bar{F}_B = q\underbrace{\bar{V} \times \bar{B}}_{\text{vektörel çarpım}} \Rightarrow |F_B| = F_B = |q|\, V B \sin\theta$$





Elektrik alanı ve Manyetik alan arasındaki farklar

- Elektrik kuvveti elektrik alanına paraleldir. Manyetik kuvvet manyetik alana diktir.
- Elektrik kuvveti parçacığın hızından bağımsızdır. Manyetik kuvvet parçacık hareketli ise etki eder.
- Elektrik kuvveti, parçacığın konumunu değiştirerek iş yapar. Manyetik kuvvet parçacık yer değiştirdiğinde iş yapmaz.

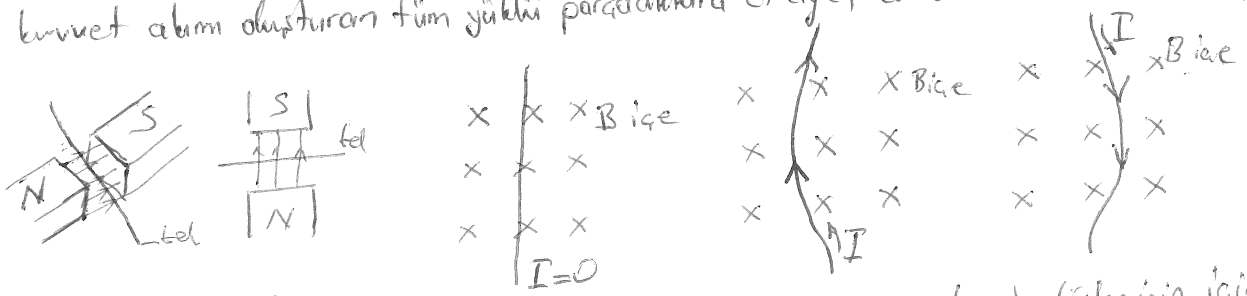
V hızıyla hareket eden yüke uygulanan manyetik alan, onun hız vektörünün yönünü değiştirebilir. Fakat hızın büyüklüğünü veya kinetik enerjisini değiştiremez.

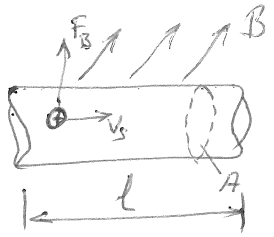
Manyetik alanın birimi, Coulomb – metre/saniye başına Newton dur. Buna Tesla denir.

$$1T = \frac{N}{Cm/s} \qquad 1T = 10^4 \text{Gauss} \qquad \frac{C}{s} = A \Rightarrow 1T = \frac{N}{A.m} \text{ olur.}$$

· Akım taşıyan iletkene etkiyen manyetik kuvvet

Akım çok sayıda yüklü parçacıkların oluşmaktadır. Bu durumda tele etkiyen net kuvvet akımı oluşturan tüm yüklü parçacıklara etkiyen kuvvetlerin vektörel toplamıdır.



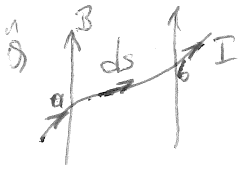


(X) işareti manyetik alanın yönünün kağıt düzleminin içine doğru olduğunu ifade eder.

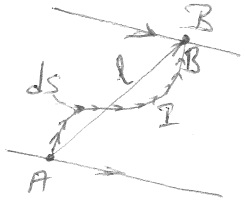
$+q$'ya etkiyen kuvvet $\bar{F}_{B+q} = q\bar{v}_s \times \bar{B}$'dir. Teldeki yüklerin hepsine etkiyen kuvvet için yük sayısı ile kuvvet çarpılır. Parçanın hacmi $A.l$ için yük sayısı nAl'dir. n, birim hacimdeki yük sayısıdır.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nqv_s A \Rightarrow \bar{F}_B = (q\bar{v}_s \times \bar{B})nAl \text{ olur. Burada } I = nqv_s A$$

yerine yazılırsa $\bar{F}_B = I\bar{l} \times \bar{B}$ (l, I yönünde vektördür)

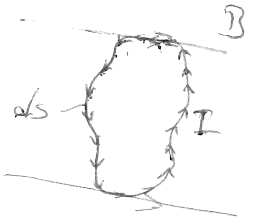


$$d\bar{F}_B = I\,\bar{ds} \times \bar{B} \Rightarrow \bar{F}_B = I\int_a^b ds \times B$$



$$F_B = I\left(\int_a^b ds\right) \times B = Il \times B$$ ds, vektörlerinin vektörel toplamı l olur.

$$F_B = I\left(\overbrace{\oint ds}^{0}\right) \times B = 0 \text{ olur.}$$



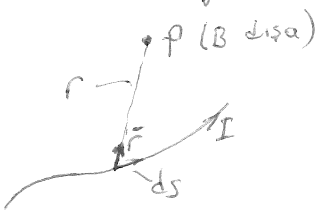
ds vektörlerinin vektörel toplamı sıfırdır.

Düzgün bir manyetik alan içindeki herhangi bir kapalı akım ilmeğine etkiyen net manyetik kuvvet sıfırdır.

Biot-Savart Yasası

Biot-Savart yasası, uzaydaki bir noktadaki manyetik alanı I'ya göre ifade eder. I akım taşıyan bir telin bir ds uzunluk elemanının P noktasında oluşturduğu $d\bar{B}$ manyetik alanı için deneysel gözlemlerle aşağıdaki sonuçlar görülür.

- $d\bar{B}$ vektörü hem ds (akım yönünde), hem de ds'den P'ye yöneten $\bar{r}$ birim vektöre diktir.
- $d\bar{B}$'nin büyüklüğü r^2 ile ters orantılıdır.
- $d\bar{B}$'nin büyüklüğü I ve ds ile orantılıdır.
- $d\bar{B}$'nin büyüklüğü $\sin\theta$ ile orantılıdır. θ, $d\bar{s}$ ve $\bar{r}$ arasındaki açıdır.

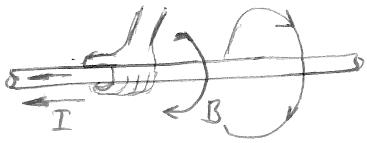


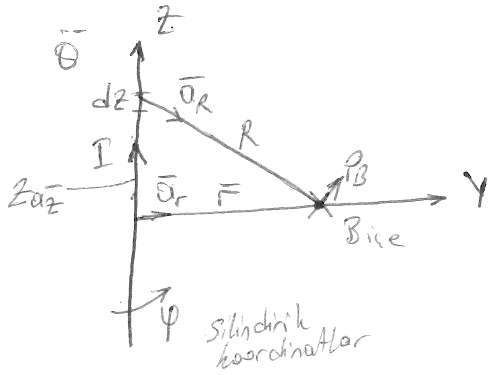
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\bar{s}\times\bar{r}}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,(T.m/A)\,(H/m)$ H-henry boşluğun manyetik geçirgenliği dir.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\bar{s}\times\bar{r}}{r^2}$$

I akım taşıyan telin P noktasında oluşturacağı manyetik alanın yönü sağ el kuralı ile belirlenebilir. Buna göre sağ elin baş-yönü sağ el kuralı ile belirlenebilir. Buna göre sağ elin baş parmağı akımın geçiş yönünü gösterecek şekilde tel sağ el avuç içine alınırsa teli saran diğer parmaklar manyetik alan yönünü gösterir.





Z ekseni boyunca yerleştirilen ve sabit I akım taşıyan ince doğrusal bir telin P noktasında oluşturduğu manyetik alanın büyüklüğü ve yönünü bul.

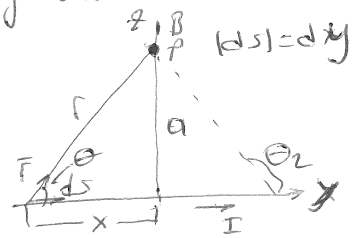
$$R = \begin{array}{ccc} 0 & r & 0 \\ -0 & 0 & z \\ \hline r & & -z \end{array} \Rightarrow \bar{R} = r\bar{a}_r - z\bar{a}_z \qquad |R| = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$\bar{a}_R = \frac{r\bar{a}_r - z\bar{a}_z}{(r^2+z^2)^{1/2}} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\bar{z}\times\bar{a}_r}{R^2}\,\bar{a}_R$$

$$\bar{B} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz\,a_z\times(r\bar{a}_r - \overset{0\text{ olur.}}{z\bar{a}_z})}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\,dz\,a_\varphi}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left.\frac{z.r}{r^2(r^2+z^2)^{1/2}}\right|_{-\infty}^{\infty} a_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\bar{a}_\varphi\,(T) \qquad \left(a_z\times r\bar{a}_r = r\bar{a}_\varphi \text{ ve } \bar{a}_z\times\bar{a}_z = 0\right)$$

Ö x ekseni boyunca yerleştirilen ve sabit bir I akımı taşıyan ince doğrusal bir tel verilişen. Bu akımın P noktasında oluşturduğu manyetik alanın büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.



$$d\vec{s}\times\hat{r} = a_x|ds\times\hat{r}| = \bar{a}_x\, dy\sin\theta$$

$$d\bar{B} = dB\bar{a}_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dy\sin\theta}{r^2}\bar{a}_x$$

tüm $d\bar{B}$'ler x yönündedir.

$$r = \frac{a}{\sin\theta} = a\csc\theta, \quad \tan\theta = a/(-y) \Rightarrow y = -a\cot\theta \text{ türev alınırsa}$$

$$dy = a\csc^2\theta\, d\theta$$

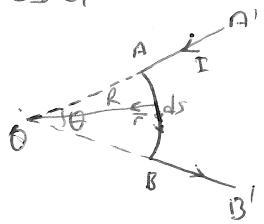
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cancel{a\csc^2\theta}\sin\theta\, d\theta}{a^{\cancel{2}}\cancel{\csc^2\theta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\, d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$y=-\infty$'dan $y=+\infty$'a değişirken $\theta_1 = 0$'dan $\theta_2=\pi$ olur.

$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \cos 0 - \cos\pi = 2$ olur. $\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$ olur

Ö



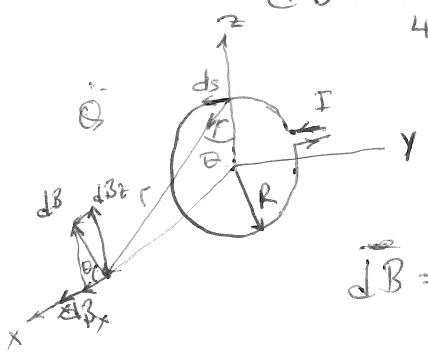
O daki manyetik alanı bulunuz.

AA' ve BB' $ds\times r = 0$ olduğundan bunların oluşturduğu manyetik alan sıfırdır.

x manyetik alan yönü her noktada AB boyunda ds, r'ye diktir. $|ds\times r| = ds$ dir.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{R^2} \text{ dir.} \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot s = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\theta \quad s = \theta\cdot R \text{ dir}$$

Ö



ds, r'ye dik olduğundan $|ds\times r| = ds\cdot(1)\sin 90 = ds$ olur.

$$r^2 = x^2 + R^2 \qquad dB_x = dB\cos\theta$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|ds\times\hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{x^2+R^2}$$

y bileşenleri birbirini götürür

$$B = B_x = \oint dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{ds\cos\theta}{x^2+R_2}$$

θ, x, R sabittir. ve $\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$ dir.

$$B_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}\oint ds = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

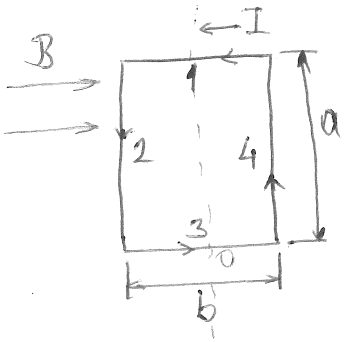
$\oint ds = 2\pi R$ dir.

$s = R\,d\theta \Rightarrow R\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R$ olur.

$x=0$ için $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

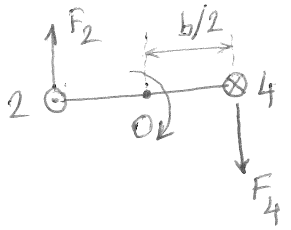
$x >> R$ için $B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$ olur.

Düzgün bir manyetik alan içerisindeki bir akım ilmeğine etkiyen Tork



$F_1 = F_3 = 0$ 1 ve 3 nolu kenarlara uygulanan kuvvetler

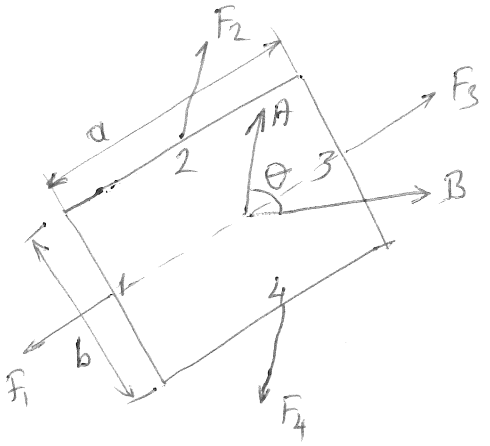
$F_2 = F_4 = IaB$ 2 ve 4 nolu kenarlara uygulanan kuvvetler.

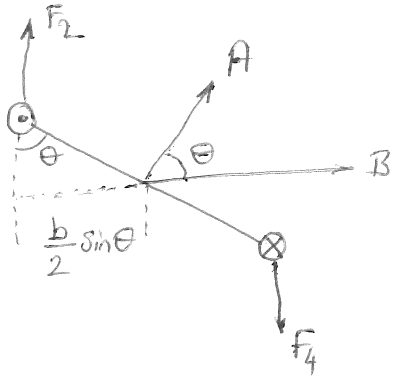


İlmek (çerçeve) O merkezinden sabitlenirse kesit görünümünde yandaki gibi etkiyen kuvvetler olur.

$$T_{max} = F_2\frac{b}{2} + F_4\frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = I\underbrace{a.b}_{alan}B$$

$A = ab$ çerçevenin alanı $T_{max} = IAB$





F_1 ve F_3 aynı başlangıç noktasından geçtiği için birbirini yok eder.

F_2 ve F_4 kuvvetleri bir çift oluşturur. Bunun için herhangi bir noktaya göre torkları vardır. F_2 ve F_4'ün moment kolları, $\frac{b}{2}\sin\theta$ dır.

$F_2 = F_4 = IaB$ olduğundan O'ya göre tork

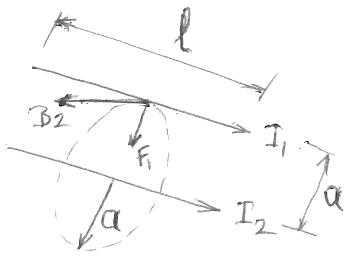
$$T = F_2\frac{b}{2}\sin\theta + F_4\frac{b}{2}\sin\theta = IaB\frac{b}{2}\sin\theta + IaB\frac{b}{2}\sin\theta$$

$$= I\,a.b\,B\sin\theta = IAB\sin\theta \text{ olur.}$$

⊙ → akımın kağıt yüzeyinden dışarı doğru olduğunu gösterir.

⊗ – akımın dışarıdan kağıt yüzeyine doğru olduğunu gösterir.

İki Paralel iletken arasındaki Manyetik kuvvet



I_1, I_2 akımlarını taşıyan iki paralel iletkenin oluşturdukları manyetik alanlar ve bir birlerine uyguladıkları kuvvetler

$F_1 = I_1 \, l \, B_2$ I_2 akımı taşıyan iletkenin diğer iletkene uyguladığı kuvvet

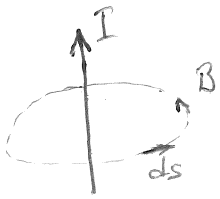
$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$ Biot-Savart yasasından bulunmuştu.

$F_1 = I_1 \, l \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \, l$ | birim uzunluğa etkiyen kuvvet $\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$

<u>Amper</u>: Aralarındaki uzaklık 1m olan iki uzun, paralel telin taşıdıkları akımlar özdeş olduğunda, birim uzunluklarına etkiyen kuvvetin büyüklüğü 2.10^{-7} N/m ise tellerden geçen akımlar birer Amper (A) dir.

Coulomb: Bir iletken 1A'lik akım taşırken, iletkenin bir kesitinden 1s'de geçen yük 1C' dur.

Ampere Yasası



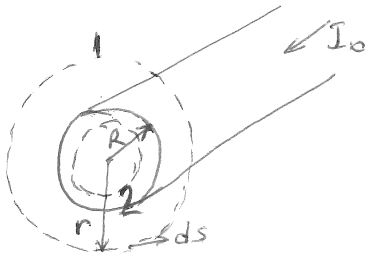
I akım taşıyan bir telin oluşturduğu manyetik alan şekildeki gibidir. $\vec{B}.\vec{ds}$ çembersel yol üzerindeki ds'lerin toplamını alalım. Bu yolda $\vec{B}$ ve $\vec{ds}$ paraleldir. Bunun için $\vec{B}.\vec{ds} = B.ds$ olur. ($\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ olur)

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ dir. $\oint B.ds = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{\cancel{2\pi r}} \cancel{2\pi r} = \mu_0 I$ olur.

Herhangi bir kapalı yol çevresinde B.ds'nin çizgi integrali $\mu_0 I$'ya eşittir.

I kapalı yolun çevrelediği herhangi bir yüzeyden geçen toplam sürekli akımdır. $\oint B ds = \mu_0 I$

Ö Kesitinin her tarafına düzgün dağılmış kararlı bir I_0 akımı taşıyan R yarıçaplı uzun ve doğrusal bir tel veriliyor. $r \gg R$ ve $r < R$ bölgelerinde telin merkezinden r uzaklığındaki noktalarda manyetik alanı hesaplayınız.



1 noklu çember için:
B'nin büyüklüğü sabit ve yönü ds'ye paraleldir.
Toplam akım I_0 olduğuna göre Ampere yasasından

$$\oint B.ds = B\oint ds = B\,2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r \gg R$$

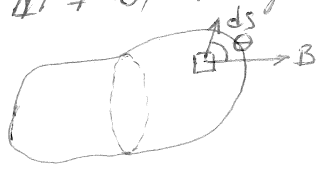
simetrik durumlarda Biot-Savart yasasından daha kullanışlıdır.

2 noklu çember için

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow I = \frac{r^2}{R^2} I_0 \qquad \left(J = \frac{I_0}{\pi R^2} \text{ dir.}\right)$$

$$\oint B.ds = B(2\pi r) = \mu_0 I = \mu_0\left(\frac{r^2}{R^2} I_0\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} r \quad r < R \text{ için}$$

Manyetik Akı



(ds yüzeye dik alan vektörüdür.)

Keyfi şekilli bir yüzey üzerinde alanı ds olan bir yüzey elemanı alalım. Bu elemandaki manyetik alan $\bar{B}$ ise elemandan geçen manyetik akı

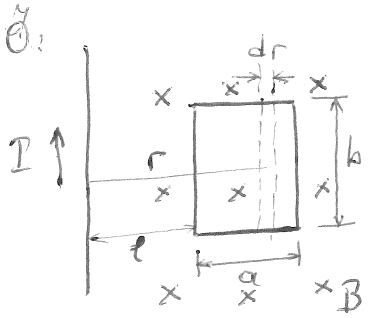
$d\phi = \bar{B}.d\bar{s}$ olur. Akı ϕ ile gösterilir.

Tüm yüzeyden geçen toplam akı

$\phi = \int \bar{B}.d\bar{s}$ olur. Birimi $T.m^2$ veya Weber (Wb) dir.

Yüzey alanı $S(A)$ olan bir düzlem ve $d\bar{s}$ vektörü ile θ açısı yapan düzgün bir B manyetik alanı alalım. Düzlemden geçen akı $\phi = BA\cos\theta$ olur.

Ö:



Şekildeki teldeki I akımının ilmek (çerçeve) den geçirdiği toplam manyetik akıyı bulunuz.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{idi}$$

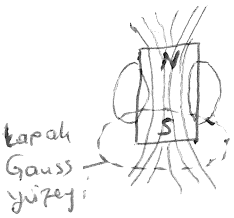
ilmek içinde $B // ds$ dir.

$$\phi = \int B\,ds = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,ds \qquad ds = b\,dr \text{ dir.}$$

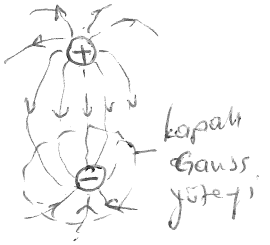
$$\phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_{l}^{l+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln r\Big|_{l}^{l+a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{a+l}{l}\right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{l}\right)$$

Manyetizmada Gauss yasası

Herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net ~~akı~~ manyetik akı sıfırdır.



$$\oint B.ds = 0$$



$$\oint D.ds = Q \quad \text{veya}$$

$$\oint E\,ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Elektrik alanında Gauss yasası

Mıknatıslanma vektörü ve manyetik alan şiddeti

Bir maddenin manyetik durumu mıknatıslanma vektörü (M) ile tanımlanır. Bu vektörün büyüklüğü, maddenin birim hacminin net manyetik momentine eşittir. Bir maddedeki toplam manyetik alan B, dış manyetik alan B_0 ve maddenin mıknatıslanmasına (B_M) bağlıdır.

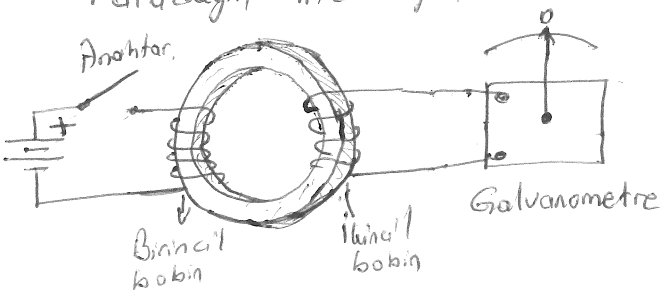
$$B = B_0 + B_M \qquad B_M \text{ manyetik maddenin oluşturduğu alan } B_M = \mu_0 M \text{ dir.}$$

$$B = B_0 + \mu_0 M$$

Manyetik alan şiddeti H mıknatıslanmadan kaynaklanan manyetik alanları tanımlarken kullanılabilecek bir büyüklüktür. Manyetik alan şiddeti tellerdeki iletim akımlarının maddeye etkisini temsil eder. B ile H arasındaki farkı vurgulamak için B'ye manyetik akı yoğunluğu denir. $H = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} - M$ ile tanımlanan vektördür.

$B = \mu_0(H+M)$ H ve M birimi: birim hacimdeki manyetik moment $Am^2/m^3 = A/m$ dir.

Faradayın indüksiyon kanunu

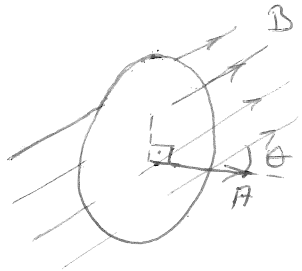


Birincil bobine uygulanan gerilim Anahtar açılıp kapanarak uygulanır. Anahtar kapatılırsa birincil bobindeki akım değişimi değişen bir manyetik alan oluşturur. Bu manyetik alan ikincil bobini, manyetik akının büyük kısma halka üzerinden akarak, keser bu manyetik akı ikincil bobinde bir emk indükler. Anahtar açıldığında değişen manyetik akı oluşur ve ters bir emk indüklenir. İndüklenen emk Galvanometrenin ibresinin ∓ yönde sapmasıyla gözlenebilir.

Yani bir devreden geçen manyetik akı zamanla değiştiğinde devrede bir emk oluşur. İndüklenmiş akım ve emk'lar için genel ifade, bir devrede indüklenen emk, devreden geçen manyetik akının zamana göre türevi ile doğru orantılıdır. Buna Faradayın indüksiyon yasası denir.

$$e = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{ve} \quad \Phi = \int B\,dS \quad \text{manyetik akı}$$

N sarım için $e = -N\dfrac{d\Phi}{dt}$ olur



Şekildeki gibi düzgün bir B manyetik alan içindeki akım ilmeğinden geçen akı

$$\Phi = BA\cos\theta \text{ dır.}$$

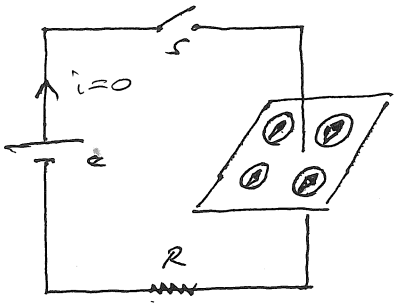
Buradan indüklenen emk $e = -\dfrac{d}{dt}(BA\cos\theta)$ olur.

- B nin büyüklüğü zamanla değişebilir.
- İlmeğin çevrelediği alan zamanla değişebilir.
- B ile ilmeğin normali arasındaki θ açısı zamanla değişebilir.
- Yukarıdakilerin herhangi bir birleşimi olabilir.

Bu durumların herhangi biriyle indüklenmenin gerçekleşebileceği görülür.

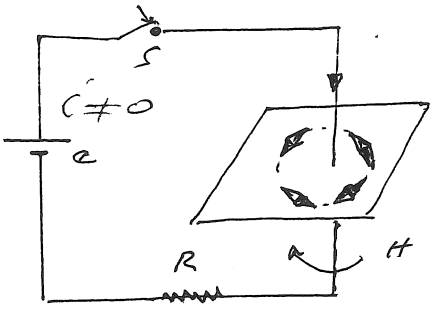
Elektromanyetizma

Durgun yükler elektrik alanını oluştururken, hareket eden yükler ayrıca manyetik alanı oluştururlar. Oluşan alan akıma dik bir doğrultuda olur.



a) Akımın akmadığı devre ve pusulalar.

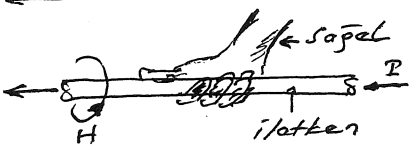
Anahtar açık durumda iletken çevresinde man. alan bulunmadığı için pusulalar kuzeyi gösterir.



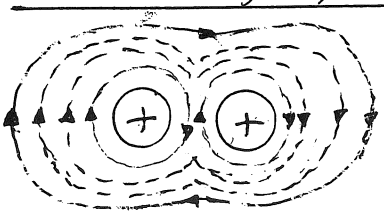
b) Akımın dolaştığı devre ve pusulaların durumu

Anahtar kapalı olduğundan akım dolaşır ve iletkenin çevresinde man. alan oluşur. Oluşan alanın pusula ibrelerini etkileyerek bir daire çizildiği görülür.

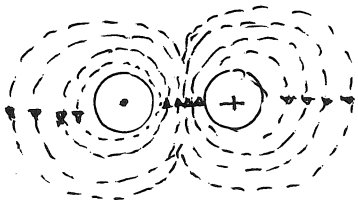
"Sağ-el I kuralı": Akım taşıyan bir iletkende oluşan alanın yönü için kullanılır. Baş parmak akımı diğer iletkeni kavrayan parmaklar manyetik alanın yönünü belirler.



Akım taşıyan paralel iletkenlerde manyetik alan



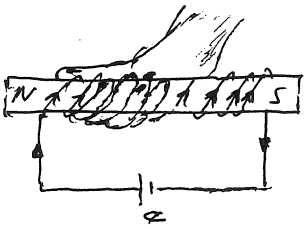
a) Aynı yönlü akımlar



b) Zıt yönlü akımlar

Şekil a'da alanların durumundan dolayı iletkenler yaklaşırken, şekil b'de iletkenler uzaklaşmak istiyecekleridir.

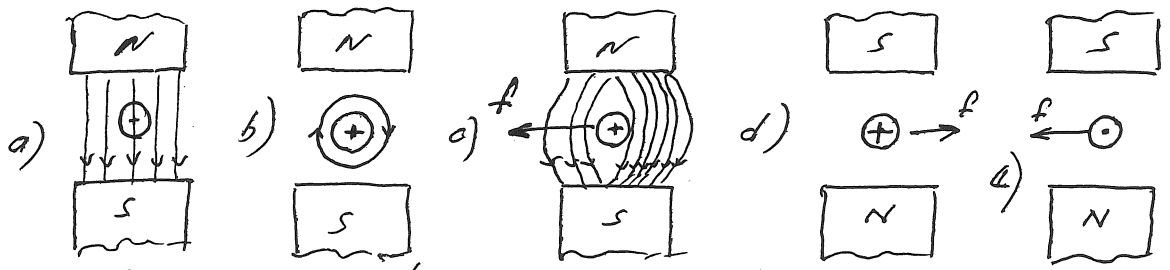
Sağ-el II kuralı:
Bir bobinden geçen akımın oluşturacağı manyetik alan ve kutuplaşma sağel II kuralı ile bulunur.



akım taşıyan bobin sağ-el avuç içerisine alınır. Baş parmak "N kutbunu" gösterirken diğer dört parmak akım yönünü gösterir.

Akım Taşıyan İletkenin Manyetik Kutuplar Arasındaki Durumu

Akım taşıyan bir iletken manyetik alan içerisine alınırsa, alanın dışına doğru itilir. Bu itilme sağ-el kuralı ile tespit edilir.

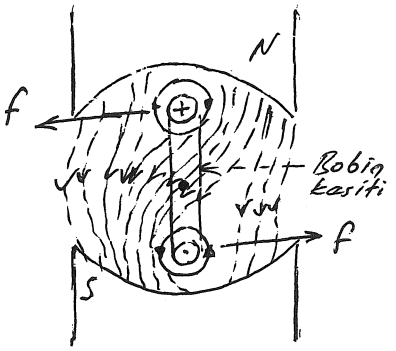


<u>Sol-el kuralı</u>; Sol elavuç içi N kutbunu gösterecek şekilde kutuplar arasına sokuldığında dört parmak akım yönünü gösterirken dik duran baş parmak itilme yönünü gösterir.

<u>İtilmenin sebebi</u>; Ortak alanda iletkenin bir yanında alan zayıflaması oluşur. Bu zayıflamanın tersi yönünde ise alan yıpılması meydana gelir. Doğal olarak iletken zayıf alan yönüne doğru itilir (Şekil c). Şekil d'de iletken akımı sabit iken kutupların değiştirilmesi itilme yönünü değiştirmiştir.

Açıklama; Hem kutupları hem de akımın yönünü değiştirdiğimizde itilme yönü sabit kalmaktadır.

Akım Taşıyan Bobinin Manyetik Kutuplar Arasındaki Durumu



İki kutup arasında bulunan akım geçirilen bobin merkezlenmiş olduğu kabul ediliyor.
İki alanın etkileşimi sonucu alt ve üst kenarlarda zıt yönlü itilme kuvvetleri oluşur. Oluşan kuvvetlerle bobin sola doğru aşı kazanır.
Bobinin dönme yönü sol-el kuralı ile bulunabilir.

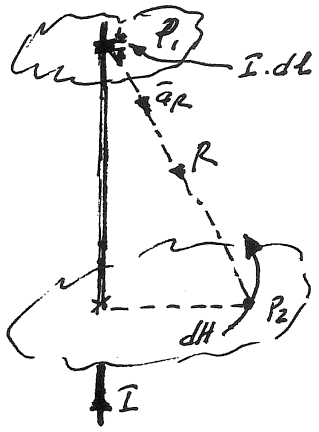
Dönme hareketinin olabilmesi için 90° dönme sonucu yatay konuma gelen bobinin akım yönü değiştirilmelidir. Akımın yön değiştirme işlemine komütasyon denir.
Komütasyon ya;
a) fırça-kollektör düzeneği ile
b) Elektronik veya mekanik anahtarlarla gerçekleştirilir.

Açıklanan düzenek DC motorların prensip yapısıdır.

Biot - Savart Yasası

- Durgun yüklerin oluşturduğu elektrik alanı zamanla değişmez ve elektro-statik kuramını oluşturur.
- Kararlı akımların manyetik alanı zaman içerisinde sabit kalır ve manyeto-statik terimini doğurur.

- Uzayın herhangi bir yerindaki manyetik alan, bu alanı oluşturan akımın ifadesini baldurur. $\{ I = \frac{d\Phi}{dt}$



Biot - Savart Yasasına göre; akım taşıyan $I.dl$ elemanın (birim eleman) P_2 noktasında oluşturacağı manyetik alan,

$$d\bar{H} = \frac{I.d\bar{l} \times \bar{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{A.m}{m^2} = \frac{A}{m} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\bar{H} = \oint \frac{I\, dl \times \bar{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{A}{m} \quad \Big\{ \bar{E} = \frac{V}{m} \text{ diye tanımlamıştı}$$

Not: İletkenin çevresinde bir manyetik alan oluşurdu... Oluşan bu alan akıma ve P_2 ye dik olur (dH)

- Manyetik akı yoğunluğu $\bar{B} = \mu_0 \mu_r . \bar{H} = \frac{W}{m^2} \Big\{ \bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r . \bar{E} = \frac{C}{m^2}$ idi...

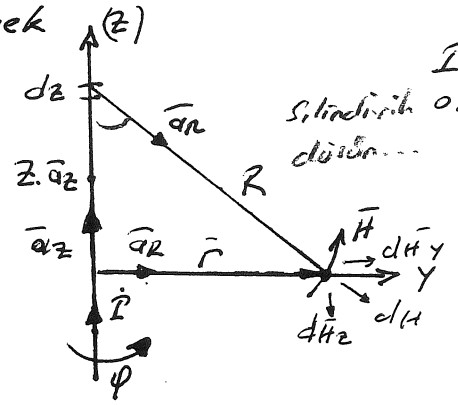
- Bir bobinin 1 Weberlik akı oluşturabilmesi için, içerisinden 1A geçmeli ve dağarcı 1H olmalıdır. $\{ 1W = 1H . 1A . 1 \text{ Tur}$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \int \frac{dl}{R^2} . \bar{a}_R = \frac{W}{m^2} = \text{Tesla} = 10^4 \text{ Gauss olur.}$$

Not: $\mu = \mu_0 . \mu_r = \frac{H}{m}$ olur. $\{ \mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ dir.

* - Manyetik akı $\Phi = \oint \bar{B}\, ds = \frac{W}{m^2} . m^2 = W$ olarak bulunur.

Örnek



I akımını taşıyan sonsuz telin r uzaklığındaki silindirik düzlem... oluşturacağı manyetik alanı bulunuz.

$$\bar{R} = \begin{cases} 0 \quad r \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad z \\ r - z \text{ olur} \end{cases} \Rightarrow \bar{R} = r\bar{a}_r - z\bar{a}_z \Rightarrow |\bar{R}| = \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$\bar{a}_R = \frac{r\bar{a}_r - z\bar{a}_z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\bar{H} = \oint \frac{(I.dz)\bar{a}_z}{4\pi R^2} \times \bar{a}_R$$

z bileşenler simetrik olduğundan ihmal edilir

$$\bar{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(I.dz\, \bar{a}_z) \times (r\bar{a}_r - z\bar{a}_z)}{4\pi (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r.dz\, \bar{a}_\varphi}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

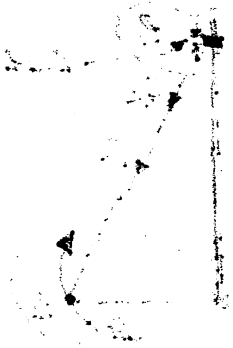
$$\bar{H} = \frac{I.\bar{a}_\varphi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z.r}{r^2(r^2+z^2)^{1/2}} = \frac{I}{2\pi.r} \bar{a}_\varphi \frac{A}{m} \text{ bulunur.}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

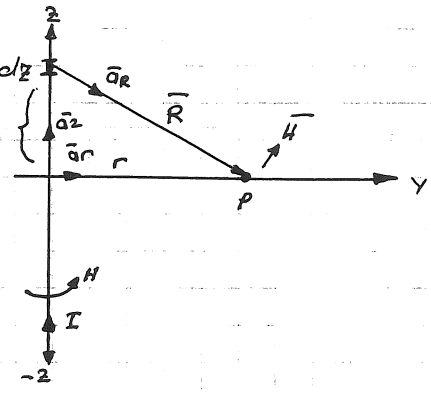
Not

$\bar{a}_z \times \bar{a}_r = \bar{a}_\varphi$, $\bar{a}_z \times \bar{a}_z = 0$ olur.



Biot-Savart Yasası ile ilgili örnekler

Örnek 1



$B = \mu_0 H$

$H = \frac{B}{\mu_0}$

I akımını taşıyan sonsuz uzunluktaki ince iletkenin P noktasında oluşturacağı man. alanı bulunuz.

$$\bar{R} = \begin{matrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & z \end{matrix} \qquad |\bar{R}| = (r^2+z^2)^{1/2}$$

$$r\bar{a}_r - z\bar{a}_z$$

$$\bar{a}_R = \frac{r\bar{a}_r - z\bar{a}_z}{(r^2+z^2)^{1/2}} \text{ olur.}$$

$$\bar{H} = \oint \frac{(I.dz)\bar{a}_z}{4\pi R^2}\bar{a}_R$$

$$= \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz\ \bar{a}_z \times \bar{a}_R}{(r^2+z^2)}$$

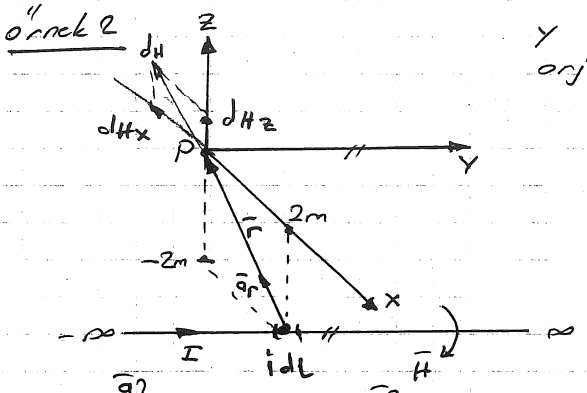
$$\bar{a}_z.\left(\frac{r\bar{a}_r - z\bar{a}_z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

$$\bar{a}_z.z\bar{a}_z = 0$$

$$\bar{a}_z.r\bar{a}_r = r.\bar{a}_\varphi$$

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi}r\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz.a\varphi}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi}\frac{r}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\ \bar{a}_\varphi}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \frac{I.\bar{a}_\varphi}{4\pi.r}.2 = \frac{I}{2\pi.r}a\varphi$$

Örnek 2



y doğrultusunda ve yönünde 5A taşıyan incetel orjinde oluşturacağı man. alanı bulunuz.

$$\bar{r} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -z \end{matrix} \qquad |\bar{r}| = 2\sqrt{2}$$

$$-2\bar{a}_x + 2\bar{a}_z$$

$$\bar{a}_r = \frac{2(-\bar{a}_x + \bar{a}_z)}{2\sqrt{2}} = \frac{-a_x + \bar{a}_z}{\sqrt{2}} \text{ olur}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}\bar{a}_\varphi \text{ (yukarıdaki örnekte bulunda)}$$

$$H = \frac{I\ \bar{a}_\varphi}{2\pi.2\sqrt{2}}.\bar{a}_r$$

$$H = \frac{I}{2\pi\ 2\sqrt{2}}.\frac{\bar{a}_z + \bar{a}_x}{\sqrt{2}}$$

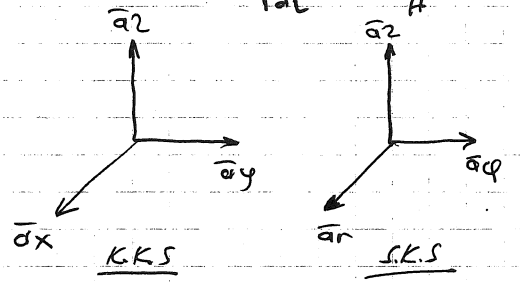
$$H = \frac{5}{2\pi\ 2{,}82}\frac{\bar{a}_z + a_x}{\sqrt{2}}$$

$$H = 0{,}2\ (\bar{a}_x + \bar{a}_z)\ \frac{A}{m} \text{ bulunur.}$$

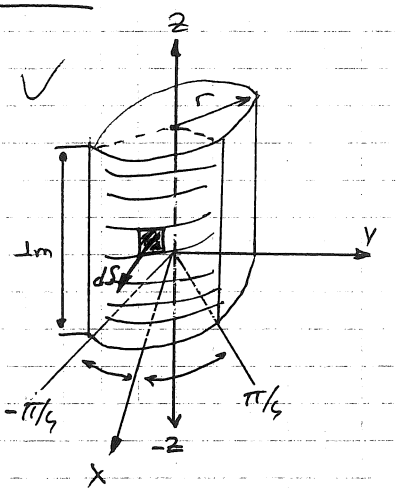
$$\bar{a}_\varphi.\bar{a}_r = \bar{a}_\varphi\left(\frac{-a_x + \bar{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{a}_\varphi(-a_x) = \bar{a}_z$$

$$\bar{a}_\varphi.\bar{a}_z = \bar{a}_x$$



Örnek 3



$\bar{H} = \frac{2{,}39.10^6}{r}\cos\varphi\,\bar{a}_r$ A/m'lik bir radyal olan içerisinde kalan kısmın, ($-\pi/4 < \varphi < \pi/4$, $0 < z < 1m$ aralığında) akısını bulunuz.

$$\bar{B} = \mu\ \bar{H} = \frac{2{,}39.10^6}{r}.4\pi 10^{-7}\cos\varphi\,\bar{a}_r$$

$$\mu = \frac{H}{m}$$

$$\mu = \mu_r.\mu_0$$

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$$

$$\phi = \int_0^1\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(r.d\varphi.dz.\bar{a}_r)$$

$$\phi = \int_0^1\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{3}{r}\cos\bar{a}_r(r\ d\varphi.dz\bar{a}_r)$$

$$\bar{a}_r.\bar{a}_r = 1$$

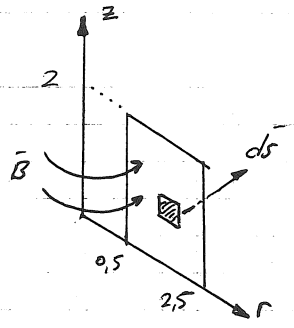
$$= 3\Big|_0^1 z\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi.d\varphi$$

$$\phi = 3.1.\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin\varphi = 3.(\sin 45 - (-\sin 45))$$

$$\sin -\alpha = -\sin$$

$\phi = 3.\sqrt{2}$ W bulunur.

Örnek 4



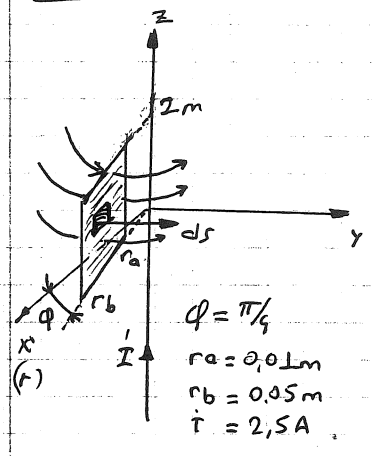
Silindirik koordinat sisteminde, $\bar{B} = \frac{2}{r}\bar{a}_\varphi$ Tesla olarak biliniyor. $0,5 < r < 2,5$ m ve $0 < z < 2$ m aralığındaki kesitin alan etkisinde kaldığını düşünerek akıyı bulunuz.

$$\phi = \oint \bar{B}\cdot d\bar{s}$$

$$\phi = \int_0^2 \int_{0,5}^{2,5} \frac{2}{r}\bar{a}_\varphi (dr.dz.\bar{a}_\varphi)$$

$$= \int_0^2 2 \int_{0,5}^{2,5} 2.Ln|r| = 2.2\ Ln\left|\frac{2,5}{0,5}\right| = \underline{6,5\ W}$$

Örnek 5



Kesit isin toplam manyetik akıyı bulunuz.

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\bar{a}_\varphi$$

$$ds = dr.dz.\bar{a}_\varphi$$

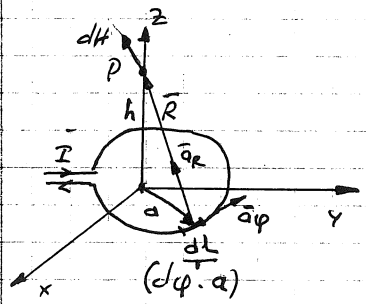
$$\phi = \oint \bar{B}.ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\bar{a}_\varphi (dr\,dz\,\bar{a}_\varphi) \qquad \{\bar{a}_\varphi.\bar{a}_\varphi = 1$$

$$= \int_0^2 \int_{0,01}^{0,05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\bar{a}_\varphi (dr\,dz\,\bar{a}_\varphi)$$

$$= \int_0^2 dz \int_{0,01}^{0,05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = 2.\frac{I}{2\pi}\int_{0,01}^{0,05} Ln|r| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} Ln\left|\frac{0,05}{0,01}\right|$$

$\phi = 1,61\ 10^{-6}$ W $= 1,61\ \mu$W bulunur.

Örnek 6



P noktasında oluşacak man. akı şiddetini bulunuz.

$$\bar{R} = -a\bar{a}_r + h\bar{a}_z \qquad \bar{a}_R = \frac{-a\bar{a}_r + h\bar{a}_z}{(a^2+h^2)^{1/2}} \qquad \left\{\begin{array}{c} 0\ 0\ h \\ a\ 0\ 0 \\ \hline -a\bar{a}_r + h\bar{a}_z \end{array}\right.$$

$$\bar{H} = \int \frac{(I.d\bar{L})\bar{a}_\varphi}{4\pi(a^2+h^2)^{1/2}}\bar{a}_R \qquad \left\{\begin{array}{l} \bar{a}_\varphi \times -\bar{a}_r = -(-\bar{a}_z) = \bar{a}_z \\ \bar{a}_\varphi \times \bar{a}_z = \bar{a}_r \end{array}\right.$$

$$= \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{a}.d\varphi)\bar{a}_\varphi}{(a^2+h^2)}.\left(\frac{-a\bar{a}_r + h\bar{a}_z}{(a^2+h^2)^{1/2}}\right) = \frac{Ia}{4\pi}\int \frac{d\varphi(a\bar{a}_z + h\bar{a}_r)}{(a^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\bar{H} = \frac{I.a^2.\bar{a}_z}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I a^2 \bar{a}_z}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\Big|_0^{2\pi}\varphi = \frac{I.a^2}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}}.2\pi\bar{a}_z$$

$$\bar{H} = \frac{I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\bar{a}_z \text{ bulunur.}$$ {Sadece $\bar{a}_z$ bileşeni dikkate alınır.

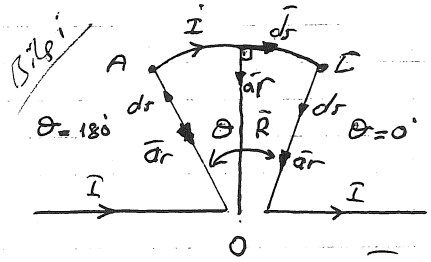
Örnek 7

Örnek 6 da verilen yapıda $h = 0$ olursa, alan şiddeti ne olur?

$$\bar{H} = \frac{I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\bar{a}_z = \frac{I.a^2}{2(a^2+0)^{3/2}}\bar{a}_z$$

$$\bar{H} = \frac{I.a^2}{2a^3}\bar{a}_z = \frac{I}{2a}\bar{a}_z \text{ bulunur.}$$

Örnek 8 Şekildeki çeber parçasının O noktasında oluşturacağı man. alanı bulunuz.



$\overline{OA}$ ve $\overline{OC}$ doğrultularının oluşturacağı alanlar sıfır olur. Çünkü akan iletkene dik kabul edilir.

Sadece $\widehat{AC}$ yayının, O noktasındaki alanın sebebi olduğu görülmektedir.

$$\bar{H} = \oint \frac{I \cdot dl \times a_r}{4\pi R^2} = \oint \frac{I \cdot d\bar{s} \times \bar{a}_r}{4\pi r^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{s} \times \bar{r} = d\bar{s}\,\bar{a}_r \cdot \sin 180 = 0 \\ d\bar{s} \times \bar{r} = d\bar{s}\,\bar{a}_r \sin 0 = 0 \\ d\bar{s} \times \bar{a}_r = 0 \quad \text{olur} \end{array} \right\} \quad d\bar{s} \perp \bar{r} \ (\theta = 90^\circ)\text{, çünkü yarıçap çemberi dik kese}$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I \cdot ds}{4\pi R^2}, \quad d\bar{H} = \frac{d\bar{B}}{\mu_0} = \int \frac{I \cdot ds}{4\pi R^2}$$

$$\bar{H} = \int \frac{I \cdot dl}{4\pi R^2} = \frac{I}{4\pi R^2} \int ds = \frac{I}{4\pi R^2} \int_0^{\theta} R \cdot d\theta \quad \Big\} \ AC \text{ yayı} = d\theta \cdot R \text{ dir.}$$

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi R^2} R \cdot \theta = \frac{I}{4\pi R}\theta \quad \text{bulunur.} \quad \Big\} \ \theta\text{, radyan olmalı}$$

a) $I = 5A$, $R = 0{,}1m$ ve $\theta = \pi/2$ olsun, $\bar{H}$ ne olur?

$$\bar{H} = \frac{5}{4\pi \cdot 0{,}1} \cdot \pi/2 = \frac{5}{8 \cdot 0{,}1} = 6{,}25 \ A/m$$

b) a şıkkındaki şartlarda $\theta = \pi/4$ olsun, $\bar{H}$ ne olur?

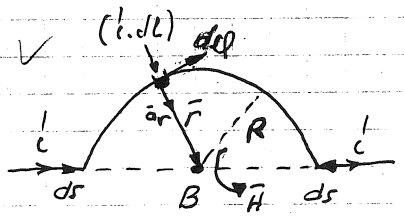
$$\bar{H} = \frac{5}{4\pi \cdot 0{,}1} \cdot \pi/4 = \frac{5}{1{,}6} \ A/m \quad \text{bulunur.}$$

c) a şıkkındaki şartlarda $\theta = 2\pi$ olsaydı $\bar{H}$ ne olurdu?

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi R}\theta = \frac{I}{4\pi R} \cdot 2\pi = \frac{I}{2R} \quad \Big\} \ R = a \text{ olsun}$$

$H = \frac{I}{2a}$ olurdu daha önce bulunmuştu (Örnek 7 bak).

Örnek 9 Şekildeki yarıçemberin B noktasında oluşturacağı man. alan şiddetini bulunuz.



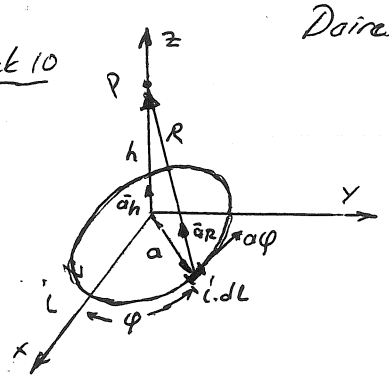
$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{s},\ d\bar{H}'\text{ ifade ediyor} \\ R\text{, yarıçap} \end{array} \right.$

* Düz kısımların oluşturacağı alanlar sıfır olur.

$$* \quad \bar{H} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{dl}{R^2} \bar{a}_r = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{R \cdot d\varphi}{R^2} \bar{a}_r$$

$$= \frac{i}{4\pi R} \int_0^{\pi} d\varphi \, a_r = \frac{i}{4\pi R} \Big|_0^{\pi} \varphi \bar{a}_r = \frac{i}{4R} \bar{a}_r \text{ olur.}$$

Örnek 10



Dairesel a yarıçaplı flatkan i akımını taşıyor.
a) z ekseninde H değerini bulunuz

$$\bar{R} = -a\bar{a}_r + h\bar{a}_z \qquad \bar{a}_R = \frac{-a\bar{a}_r + h\bar{a}_z}{(a^2+h^2)^{1/2}}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & h \\ \mp a & 0 & 0 \\ \hline -a\bar{a}_r & & +h\bar{a}_z \end{array}$$

$$\bar{a}_\varphi \times -\bar{a}_r = -(-\bar{a}_z) = \bar{a}_z$$
$$\bar{a}_\varphi \times \bar{a}_z = \bar{a}_r$$
$$dL = a.d\varphi$$

$$d\vec{H} = \frac{I.(a.d\varphi)\,\bar{a}_\varphi}{4\pi(a^2+h^2)} \cdot \bar{a}_R = \frac{I(a.d\varphi)\,\bar{a}_\varphi}{4\pi(a^2+h^2)^2} \cdot \frac{-a\bar{a}_r + h\bar{a}_r}{(a^2+h^2)^{1/2}}$$

$$d\vec{H} = \frac{(I.a.d\varphi)(a\bar{a}_z + h\bar{a}_r)}{4\pi\,(a^2+h^2)^{3/2}}$$

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{I\,a^2.d\varphi}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\,\bar{a}_z = \frac{I a^2.\bar{a}_z}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

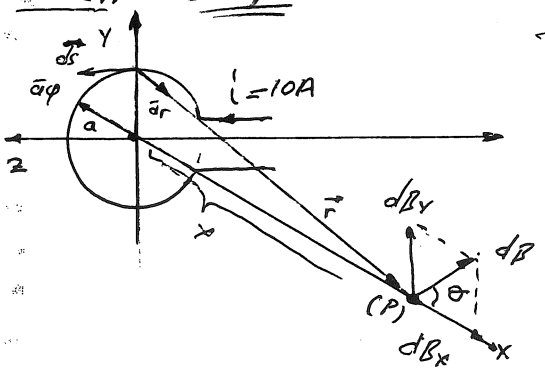
$\bar{a}_z$ dışındaki bileşenlerin zıtı olduğu için ihmal edilir.

$$H = \frac{I.a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}.\bar{a}_z \text{ olarak bulunur}$$

b) Eğer $h=0$ olursa H değeri nasıl değişir.

$$H = \frac{I\,a^2}{2\,(a^2+h^2)^{3/2}}\,\bar{a}_z = \frac{I a^2}{2a^3} = \frac{I}{2a}\,\bar{a}_z \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 11 **Bilgi**



Şekildeki i akımını taşıyan y-z düzlemindeki R(a) yarıçaplı çember telin merkezden x kadar uzaktaki P noktasında oluşturacağı alanı bulunuz.

$r^2 = x^2 + a^2$
$\theta = 90^\circ$
$d\vec{s} \perp \bar{a}_r$
x çok büyük olsun

ds; dairenin çevresi
$\oint ds = 2\pi a$
$d\bar{B} = \mu_0 \mu_r \frac{I}{4\pi}$
$d\bar{H} = \frac{I}{4\pi r^2}.ds$

dB_y bileşeninin simetrisi olacağından $\int dB_y \bar{a}_y = 0$ olur.

$$dB = d\bar{B}_x.\bar{a}_x + d\bar{B}_y.\bar{a}_y = dB_x.\bar{a}_x = dB.\cos\theta\,\bar{a}_x$$

$$\int dB = dB.\cos\theta = \int \frac{\mu_0\mu_r\, I.ds}{4\pi(x^2+a^2)}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$B = B_x = \frac{\mu_0\,\mu_r.I.a^2}{2\,(x^2+a^2)^{3/2}} \text{ olur.}$$

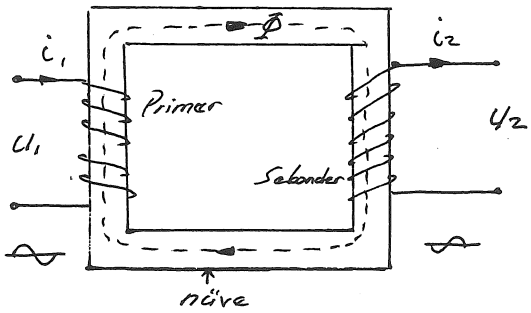
a) $x=0$ için $H=?$ $(a=1m$ olsun$)$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0.\mu_r.I.a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}} \Rightarrow \bar{B} = \frac{(4\pi.10^{-7}).(1).(i.a^2)}{2\,(0+a^2)^{3/2}} = \frac{4\pi\,10^{-7}.10}{2.1} = 2\pi.10^{-6}\,\frac{W}{m^2}$$

b) $x=5m$ için $(a=1m)$

$$B = \frac{4\pi.10^{-7}.10.1^2}{\ldots} = \frac{2\pi.10^{-6}}{\ldots} = 2\pi.10^{-6}/132{,}57 = 4{,}73.10^{-8}\,\frac{W}{m^2}$$

Manyetik İndükleme Gerilimi



Primere uygulanan AC gerilimin oluşturacağı manyetik akı nüve yardımı ile (manyetik özelliğli malzeme) sekondere iletilir. Sekonder sargılarını kesen manyetik akı sekonderde gerilim indükler.

İndüklenen emk : $-e = N\dfrac{d\Phi}{dt}$ formülü ile bulunur.

İndükleme prensibi; Eğer, akı değişkense iletken üzerinde emk oluşur.

$-e = N\dfrac{d}{dt}\Phi = N.\dfrac{d}{dt}\Phi_{max}.\sin wt$ olur $\Rightarrow$ $-e = N.w.\Phi_{max}\cos wt$ yazılı

$-e = N.w\,\Phi_{max} = e_{max}$ dır.

$-e = e_{max}.\cos wt$ olur.

N: tur
Φ: akı (Weber)
e: ind. gerilimi (Volt)
f: frekans (Hz)

$e_{eff} = (e_{max}$ değer$).(0{,}707)$ olarak yazılabilir

$-U_2 = N_2(2\pi f).\Phi_{max}\,0{,}707 = N.f.\Phi_{max}\,4{,}44$ Volt bulunur

$-U_2 = N_2.f.(B.S).4{,}44$

$-U_2 = N_2 f.B.S.4{,}44.$ olarak bulunur.

Not: Sonucun Volt olabilmesi için
B: W/m^2, S: m^2 veya B = Gauss, $S = cm^2$ ve 10^{+8} sarpan kullanılmalı

$-U_2 = N_1 f.B.S\,4{,}44 \Rightarrow N_1 = \dfrac{U_1}{\Phi_{max}.f.4{,}44}$ spir formülü bulunur.

İki Sargı arasında,

$\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{i_2}{i_1} = a$ bağıntısı vardır.

$\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{\cancel{U_2}\frac{I_2}{I_1}}{\cancel{U_2}} = \dfrac{I_2}{I_1}$

$\dfrac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \dfrac{P_1}{P_2}$

$P_1 \cong P_2$ dir.

$U_1 I_1 = U_2 I_2$

$U_1 = U_2\dfrac{I_2}{I_1}$

Örnek 10x10 cm kesitli bir nüve 1,2 W/m^2 akı yoğunluğuna sahiptir. 1200V ile beslenen primer sargı, 120V'luk çıkış (sekonder) sargısı olan bu transformator 50Hz ile çalışır diye bilinmektedir. Primer ve Sekonder spir sayılarını bulunuz

Primer spir sayısı : $N_1 = \dfrac{U_1}{4{,}44.f.\bar{B}.S} = \dfrac{1200}{4{,}44.50.1{,}2.0{,}01} = 450$ spir

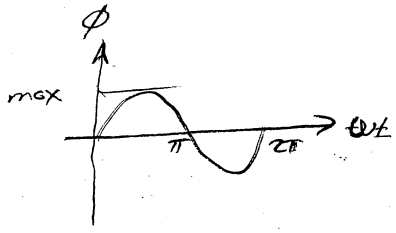
Sekonder spir sayısı : $N_2 = \dfrac{U_2}{U_1}.N_1 = \dfrac{120}{1200}.450 = 45$ spir bulunur.

Eğer Gauss ve nüve kesiti cm^2 olarak kullanılacaksa,

Primer spir sayısı : $N_1 = \dfrac{1200.10^{+8}}{4{,}44.50.(1{,}2.10^4).(10.10)} = 450$ spir

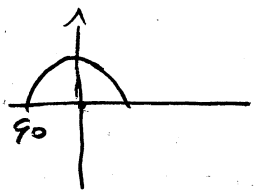
$N_2 = 45$ spir bulunur.

$$U_{ort} = Z \cdot \phi_{ort}$$
$$= Z \cdot \left(\frac{1}{T}\int_0^{\pi} \phi_{max} \cdot \sin\alpha \, d\alpha\right.$$
$$= Z \cdot f \int_0^{\pi} \phi_{max} \cdot \sin\alpha \, d\alpha$$
$$= Z \cdot f \cdot \phi_{max} \Big|_0^{\pi} \frac{-\cos\alpha}{T}$$
$$= Z \cdot f \cdot \phi_{max} \cdot 2$$
$$U_{ef} = Z \cdot f \cdot \phi_{max} \cdot 2 \cdot 1.11$$
$$= Z \cdot f \cdot \phi_{max} \; 2,22$$



$$Z = 2N \quad \begin{cases} Z = \text{iletken} \\ N = \text{tur} \end{cases}$$

$$U_{ef} = N \cdot f \cdot S_n \cdot B \cdot 2,22 \cdot 2$$
$$U_{ef} = N \cdot f \cdot S_n \cdot B \cdot 4,44 \Rightarrow N_x = \frac{U_x}{4,44 \cdot f \cdot B \cdot S_n}$$



$$\cos\omega t = \sin \omega t + 90^\circ$$

$\omega t = 0$ olsun

$$- e_{eff} = (e_{max} \cdot 0,707) \angle 90^\circ$$
$$e_{eff} = (e_{max} \cdot 0,707) \angle 90 = 180^\circ = (e_{max} \cdot 0,707) \angle 9$$

Manyetik Nüve Kayıpları

Bir manyetik nüvede akının değişimi $\left(\frac{d\phi}{dt} \neq 0\right)$ sonucu nüve üzerinde fukolt (eddy) ve histerizis kayıpları meydana gelir.

1- Fukolt (eddy) kayıpları

Manyetik alan içerisindeki iletkenin kuvvet çizgisi kesmesi sonucu üzerinde emk indüklenir. Bu prensip ile iletken olan manyetik nüvede emk indüklenir. İndüklenen emk kapalı devre nüvede eddy akımlarını doğurarak ısı oluşturur. Oluşan ısı güç kaybı olarak değerlendirilir.

Oluşan kayıplar: $P_f = k_f \left(f \cdot B_m\right)^2$ $\left\{ \begin{array}{l} P_f : \text{fukolt kaybı} \left(\frac{W}{}\right) \\ k_f : \text{katsayı} \end{array} \right.$ f = frekans (Hertz), $\bar{B}_m$ = Akı yoğunluğu (Gauss)

Kayıp gücü azaltabilmek, tek parça nüve yerine ince (0-35, 0,55) yüzeyleri yalıtılmış saçlardan paketler halinde oluşturmakla mümkün olur. Böylece eddy akımları kesitin azalmasından dolayı küçülecektir.

2- Histerizis kayıpları

Manyetik malzemelerinin molekül yapısını oluşturan dipollerin değişen akı ile bozulup-düzelmesi sonucu ısı oluşur. Oluşan ısı histerizis kaybı olarak değerlendirilir.

Oluşan kayıpları azatabilmek için malzemenin histerizis bandını daraltıcı anlamda silisyum katkılı malzemeler seçilir. Bazen malzemeye ısıl işlem uygulanarak bu kayıpları azaltmak mümkün olabilir.

Oluşan kayıplar: $P_h = k_h \cdot f \cdot B_m^{1.6}$ $\left\{ \begin{array}{l} k_h = \text{katsayı} \\ P_h = \text{histerisiz kaybı} \left(\frac{W}{}\right) \\ \bar{B}_m = \text{Maximum akı yoğunluğu (Gauss)} \end{array} \right.$

ferromagnetische Malzenden

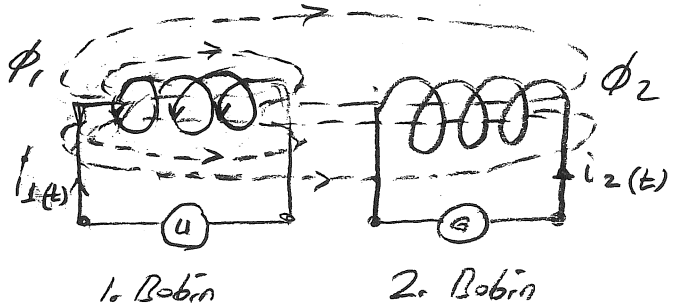
$\mu_r \gg 1$

$\mu_{r\,max} = \frac{Ni}{30} \quad \frac{Fe}{4000} \quad \frac{Mümetal}{100\,000}$

Ferrit = $Fe_2O_3 + MnO$, MgO

KARŞILIKLI İNDÜKLEME

Birbirlerinin manyetik etki alanlarında bulunan iki/daha fazla bobinin birbirlerinde oluşturdukları karşılıklı indüklenme olayıdır.



N_1 : 1. bobin tur sayısı
N_2 : 2. bobin tur sayısı

1. Faraday Yasasına göre 1. bobinin değişen akımının 2. bobinde bir indüklenme gerilimi oluşturur. Galvanometre 2. bobini kapatılınca yapar ve 2. bobinden bir değişken $i_2(t)$ akımının akmasını sağlar.

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \quad [1]$$

Böylece 2. bobinin değişken akısına maruz kalan 1. bobinde

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad [2]$$ gibi bir gerilim indüklenmesine sebep olur.

2. $i_1(t)$ akımının 1. bobinde oluşturduğu değişken olan bu bobini etkisine alarak üzerinde Lenz kuralına göre

$$e_1 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad [3]$$ gibi bir özindüklenme gerilimi oluşturur.

Aynı zamanda 2. bobinde 1. bobinin oluşturduğu değişken akımın etkisindedir. 2. bobinde de Lenz kuralına göre

$$e_2 = \underline{\underline{M_1}} \frac{di_1(t)}{dt} \quad [4]$$ bir özindüklenme gerilimi doğar.

1. ve 4. denklem eşit iki denklemdir karşılıklı indüklenme

$$\underline{\underline{M_1}} \frac{di_1(t)}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \Rightarrow \underline{\underline{M_1}} = N_2 \frac{d\phi_2}{di_1(t)}$$ olur.

Aynı şekilde 2. bobinin 1. bobinde oluşturacağı karşılıklı indüklenme ise

$$e_1 = \underline{\underline{M_2}} \frac{di_2(t)}{dt} \Rightarrow M_2 = N_1 \frac{d\phi_1}{di_2(t)}$$ olarak yazılır.

Tanım

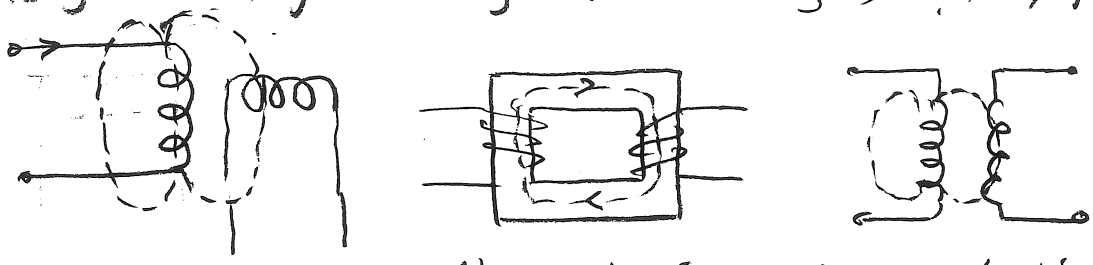
M; karşılıklı indüklenme katsayısıdır ve 1 sn'de 1. bobindeki 1A değerindeki değişim, 2. bobinde eğer 1 Volt indükliyor ise değeri 1 Henry dir denir.

Kuplajlama

İki bağımsız devre arasında elektriksel olmayan bir yolla bağlantı kurma olayıdır ve çeşitli yollarla yapılabilir.

- Optik kuplaj
- Manyetik kuplaj
- Mekanik kuplaj
- Diğer kuplajlar

Manyetik kuplaj : İki sargı bobini arasında gerçekleşen kuplajdır.



a) Gevşek kuplaj b) Sıkı kuplaj c) Orta kuplaj

Kuplaj "k" harfi ile gösterilir ve

$$k = \frac{\phi_2}{\phi_1}$$ olarak bulunur. Ayrıca $k \leq 1$ dir.

Bu oran karşılıklı indüklemeyi etkileyen bir faktördür.

Karşılıklı indükleme formüllerinden elde edilen M_1 ve M_2 yeniden yazılırsa

$$M_1 = N_2 \frac{k.d\phi_2}{di_1(t)}$$ 2. bobinde

$$M_2 = N_1 \frac{k.d\phi_1}{di_2(t)}$$ 1. bobinde

şeklinde yeniden düzenlenir.

Karşılıklı indüksiyon katsayısının bulunması

Eğer $M = M_1 = M_2$ olmuşsa ve bu iki değer çarpılırsa,

$$M^2 = k^2 \left(N_2 \frac{d\phi_2}{di_1(t)}\right)\left(\frac{N_1\, d\phi_1}{di_2(t)}\right)$$

$$N_2 \frac{d\phi_2}{di_1(t)} = L_1$$

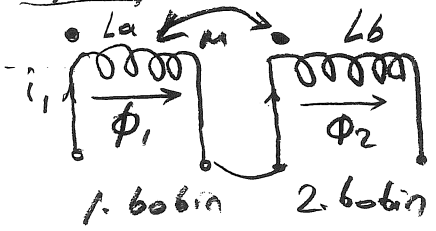
$$N_2 \frac{d\phi_1}{di_2(t)} = L_2$$

$$M^2 = k^2 L_1 . L_2 \Rightarrow M = k\sqrt{L_1 . L_2}$$ olur.

Birimi Henry olarak kabul edilir.

Seri bağlı bobinler ve karşılıklı indüklenme

A) Aynı yönlü sarım

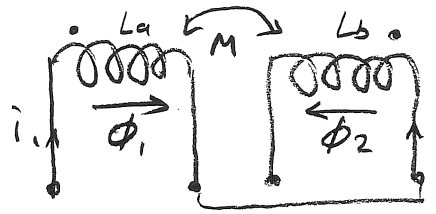


$L_1 = L_a + M$

$L_2 = L_b + M$

$L_{12} = L_a + L_b + 2M$ olur.

B) farklı yönlü sarım



$L_1 = L_a - M$

$L_2 = L_b - M$

$L_{21} = L_a + L_b - 2M$

$L_{12} - L_{21} = 4M \Rightarrow M = \dfrac{L_{12} - L_{21}}{4}$ olur.

Manyetik Devreler

Nüve-bobin ikilisinin bir arada bulunduğu yapılara manyetik devre denir. Bu devreleri anlamak için bazı terimleri tanımlayabilmek gereklidir.

I) Manyetik indüksiyon; Faraday Yasası manyetik alan içerisinde kalan bobinin üzerinde oluşacak emk'yı ifade eder.

Bobinler değişken akı içerisinde kalırlarsa;

$e = N \cdot \frac{d\phi}{dt}$ eşitliğine göre emk indükler.

Bu eşitlik düzenlenirse

$e = e_{max} \cdot \cos Wt$ olur. $\{ e_{max} \doteq$ max. gerilim

Eğer bobine uygulanacak akım dikkate alınırsa

U (Efektif gerilim) $= N \cdot f \cdot \phi_{max} \cdot 4.44$ olarak bulunur.

$\phi_{max} = B \cdot S_n$ dır.

$U = N \cdot f \cdot B \cdot S_n \cdot 4.44$ olur. $\Rightarrow N = \frac{U}{4.44 \cdot f \cdot B \cdot S_n}$

$e = -N \frac{d\phi}{dt}$

$-e = N \frac{d}{dt} \phi_m \sin wt$

$e = N\phi_m \cdot W \cdot \cos wt$

$e = e_m \cdot \sin wt$

$e_m = N \cdot B \cdot S \cdot W$

$U_{rms} = U_m \cdot 0{,}707$

$U_{rms} = N \cdot B \cdot S \cdot 2\pi \cdot f \cdot 0{,}7$

$U_{rms} = N \cdot B \cdot S \cdot f \cdot 4.44$

formülde

U: Bobin gerilimi (Volt)
f: frekans (Hertz)
B: Manyetik indüksiyon (W/m^2)
S_n: Nüve kesiti (m^2)
N: Spir tur sayısı

$N_1 = \frac{U_1}{4.44 \cdot f \cdot B \cdot S_n}$, $N_2 = \frac{U_2}{4.44 \cdot f \cdot B \cdot S_n}$

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} = a$ olur.

Manyetik indüksiyon; manyetik akı yoğunluğu olarak da bilinen bu terim birim yüzey için manyetik akı anlamında kullanılır.

$\bar{B} = \frac{\phi}{S_n} = \frac{\text{weber}}{\text{metrekare}} \left(\frac{W}{m^2} \right) = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{l}$ olarak yazılabilir.

Bazen manyetik akı yoğunluğu Gauss olarak verilir.

$1\ W/m^2 = 10^4$ Gauss olarak kabul edilir.

* $1\ W = 10^8$ Maxwell dır.

1 Gauss; yüzey olarak cm^2 yi dikkate alır.

1 Gauss; 10^8 kuvvet çizgisi $1cm^2$ yüzeyden geçer yaklaşımıdır.

II) Manyetik alan şiddeti (H); Amper. Sarım / metre olarak bilinir.

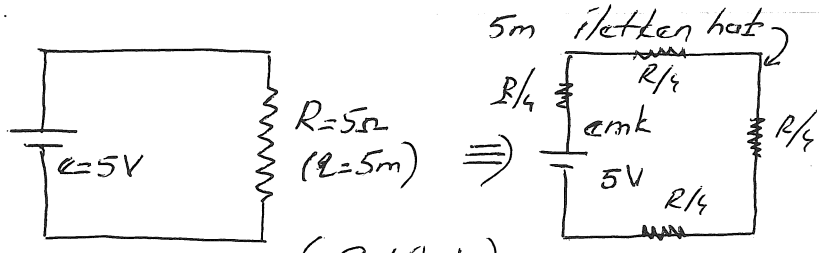
$H = \frac{F}{l} = \frac{A \cdot S}{m}$

Elektrik devresindeki gerilim gibi düşünülür

Manyetik yolun birim uzunluğu için m.mik anlamında kullanılır

* Örsted Alan şiddetin birimidir. $79{,}58\ \frac{A \cdot S}{m}$ dir.

Manyetik ve Elektrik Devresi

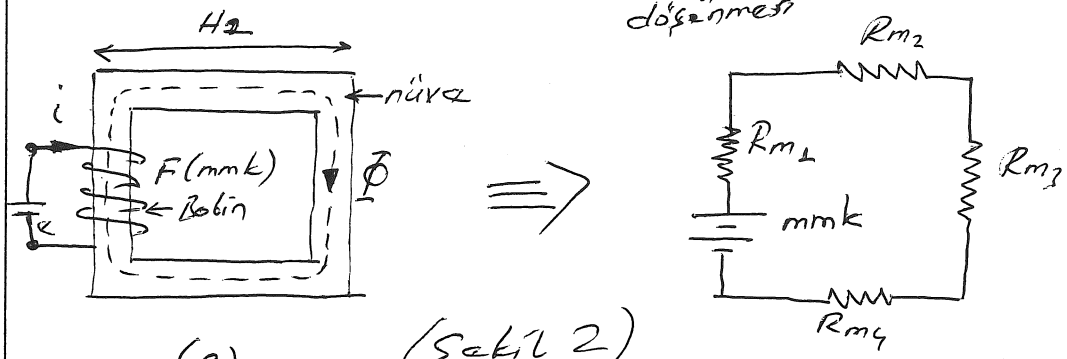


(a) 5Ω direncin sıkıştırılmış durumu

(Şekil 1)

(b) 5Ω direncin iletken hatlarda düşünmesi

Direnç teli 5m olarak iletken hat olarak düşünülürse (şekil b), birim uzunluk için direnç değeri 1Ω ve gerilim düşümü 1 Volt olur.



(a) manyetik devre

(Şekil 2)

b) Eş-değer devre

Manyetik devre (Şekil a), şekil b deki gibi elektrisel eş-değer devreye benzetilebilir.

Bir manyetik devrede kapalı elek devresi gibi (akımın dolaşabilir diği devre) düşünülebilir.

Manyetik ve elektrik devreleri arasında benzerlikler ve farklılıklar bulunmaktadır.

Benzerlikler

a) Çok benzerlik; elk devresinde akım; manyetik devrede akı benzerliğidir.
Akımın akması için enerji kaynağına ihtiyaç varken, manyetik devrelerde yine enerji kaynağı önem kazanır.

b) Manyetik ~~devrede~~ devrelerde manyetik direnç devrenin uzunluğu (l) ile doğru, kesiti ile ~~ter~~ ters orantılıdır (Sn). Aynı orantıyı elk devrelerinde de tanımlayabiliriz.

c) Elk. devrelerindeki seri/paralellik manyetik devreler içinde geçerlidir.

d) Elektrik devrelerine uygulanan ohm kuralı, kirşhoff kuralları manyetik devreler içinde geçerlidir.

elk. devreli	manyetik devre
emk	mmk (manyeto motor kuvvet)
R	Rm (manyetik direnç-relüktans)
i	Φ (manyetik akı)

farklılıklar

a) Elk. devresinde akımın geçtiği bir yol vardır (iletim hattı). Oysa, manyetik devredeki akıyı yönlendirmek çok zordur. Çünkü manyetik iyi bir direnç yoktur.

b) Elk. devresinde batarya devrenin direkt olarak bir parçasıdır ve man. devrede batarya indirekt bir parçadır. Ayrıca bobin direnci devre direncini etkilemez.

c) Manyetik devrelerde akıyı tam olarak yönlendirme mümkün olmadığı için kaçak akı oluşur ve verim düşer.

d) Manyetik direnç, iletken direnci kadar hassas hesaplanamaz. Akı yoğunluğuna göre geniş bir band içerisinde değişim gösterir.

e) Bir elk. devresinde akımı enerji kaynağı sürekli kılar fakat manyetik devrede dipollerin dizilişi için enerji gereklidir. Eğer, dc uygulanıyorsa sonraki zamanlarda enerjiye gerek duyulmaz.

Elektrik Devresi	Manyetik Devre
$I = \frac{emk}{R}$	$\Phi = \frac{mmk}{Rm}$
$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}$	
$(J = \sigma \cdot E)$ (σ: iletkenlik)	$\bar{B} = \mu \cdot H$
$R = \oint_l \frac{dl}{\sigma_s \cdot S}$	$Rm = \oint_L \frac{dL}{L \cdot \mu_s \cdot S}$
$I = \int_s J \cdot ds$	$\Phi = \int_s \bar{B} \cdot ds$
$\mathcal{E}$: potansiyel fark (emk)	F (Ni): mmk
σ : iletkenlik	μ : manyetik iletkenlik

III) Manyeto motor kuvvet (mmk): $F = N \cdot I$ (Amper-Sarım)

IV) Manyetik direnç (Rm); manyetik akıya gösterilen zorluk

$$Rm = \frac{F}{\Phi} \quad \Big\} \quad R = \frac{V}{i}$$

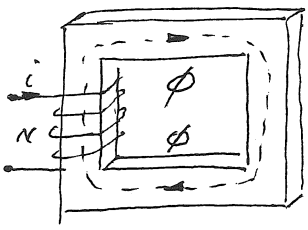
Manyetik direnç: Manyetik akının dolaştığı yolların akıya karşı gösterdiği direnç olarak adlandırılır.

Manyetik direnç / Relüktans $R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{m}{\frac{H}{m} \cdot m^2} = \frac{1}{H}$ veya H^{-1}

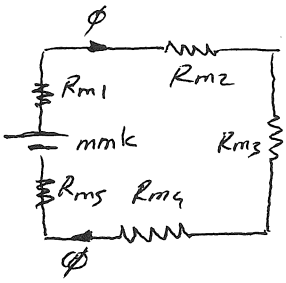
l: Ortalama yol boyu, m
S: yolun kesiti, m^2
μ_0: Boşluğun geçirgenliği $4\pi 10^{-7} \frac{W}{A.m}$ veya $\frac{H}{m}$
μ: Maddenin geçirgenliği
μ_r: Bağıl geçirgenlik

$\mu = \mu_0 \mu_r$

Seri devrede relüktans



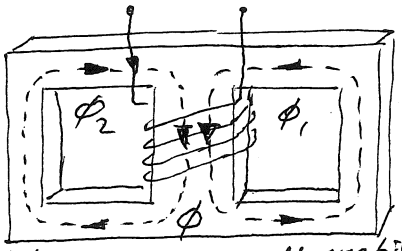
Kesit değişse bile Φ, her kolda aynıdır



$R_m = R_{m1} + \cdots + R_{mn}$

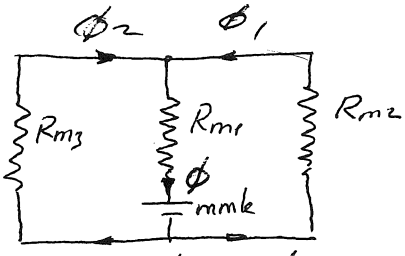
$R_m = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \cdots + \frac{l_n}{\mu_n S_n}$ şeklinde yazılabilir

Paralel devrelerde relüktans



Manyetik devre

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ olur



Eşdeğer devre

Genelde;

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}} + \frac{1}{R_{m3}} + \cdots + \frac{1}{R_{mn}}$$ olur.

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{\frac{l_1}{\mu_1 S_1}} + \frac{1}{\frac{l_2}{\mu_2 S_2}} + \frac{1}{\frac{l_3}{\mu_3 S_3}} + \cdots + \frac{1}{\frac{l_n}{\mu_n S_n}}$$ şeklinde de yazılabilir.

Verilen devrede: $R_m = R_{m1} \rightarrow (R_{m2} // R_{m3})$ şeklindedir.

Manyetik İndüksiyon (Manyetik Akı Yoğunluğu)

Birim yüzey başına düşen akı şeklinde düşünülür.

$$\bar{B} = \frac{\Phi}{S} = \frac{Wb}{m^2} = \frac{\mu . N . I}{l_{ort}} = \frac{Wb}{m^2}$$

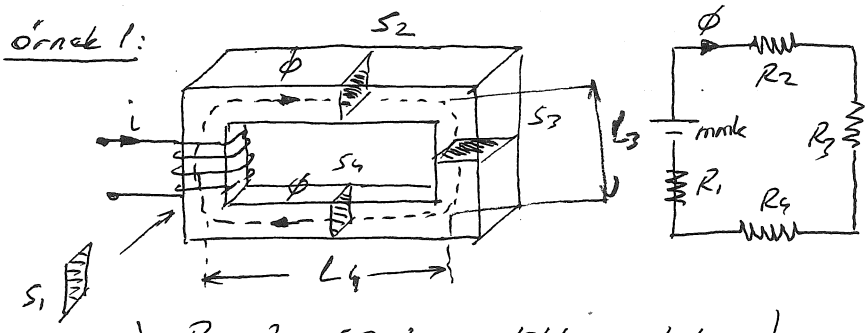
$$R_m = \frac{l_{ort}}{\mu S}$$

$$\Phi = \frac{F}{R_m} = \frac{N . i}{\frac{l_{ort}}{\mu . S}} = \frac{N i \mu . S}{l_{ort}}$$

$$\bar{B} = \frac{N i \mu S}{l_{ort}} \Big/ S = \frac{\mu . N . i}{l_{ort}} \quad \frac{Wb}{m^2}$$

Manyetik Devrelerle ilgili Örnekler

Örnek 1:



$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ olsun

$S = 6.10^{-4}\ m^2$

$l_1 = l_3 = 0.3m$

$l_2 = l_4 = 0,2m$

$i = 0,05A$

$\left.\begin{array}{l}\mu_r = 3980 \\ \mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\end{array}\right\}\ \mu = 5.10^{-3}\ \frac{H}{m}$

a) $R_m = ?$ (Toplam relüktansı bulunuz)

$$R_m = \frac{l_1}{\mu S_1} + \frac{l_2}{\mu S_2} + \frac{l_3}{\mu S_3} + \frac{l_4}{\mu S_4} = 10^5 + 0,667\ 10^5 + 10^5 + 0,667\ 10^5 = 3,33.10^5\ H$$

b) Devrenin l_1 parçasında $\bar{B}_1 = 1\ T$ (wb/m^2) için sarım sayısı ne olmalı?

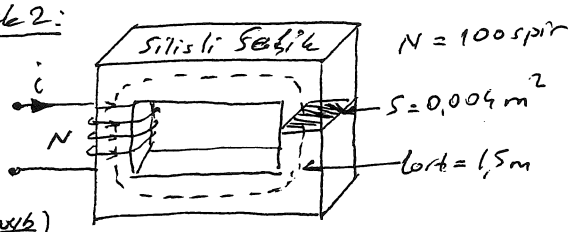
$$\phi_m = \bar{B}.S_1 = 1\,(6.10^{-4})\ wb\ ,\quad N = \frac{\phi.R_m}{I} = \frac{6.10^{-4}.\ 3,33.10^5}{0.05} = 4000 \text{ sarım}$$

c) "F" değerini bulunuz

$F = N.i = 4000.0,05 = 200\ A.S$ veya $F = \phi.(R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4})$ olabilir.

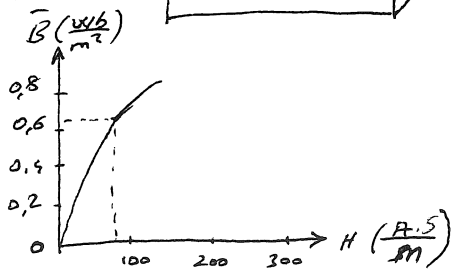
Not: F sanki gerilim gibi düşünülürken $\phi.R_{m1}$ sanki $i R_1$ gibi gerilim bölüşümüdür. Dolayısı ile tüm kollardaki F.lerin toplamı kapalı devrede K.G.K uygulanabilir.

Örnek 2:



Verilen devrede ϕ nin 25.10^{-4} Weber olması için sarıcı akımını bulunuz.

$$\bar{B} = \frac{\phi}{S} = \frac{25.10^{-4}\ wb.}{0.004\ m} = 0,625\ \frac{wb}{m^2}$$



Silisli çeliğin B-H Eğrisi

B-H tablosundan $0,625\ \frac{wb}{m^2}$ lik akı yoğunluğuna karşın H değeri $80\ \frac{A}{m}$ olduğu bulunur.

Böylece;

$$F = N.I = \frac{H.l_{ort}}{} = \frac{A.S}{m}.\ m = A.S$$

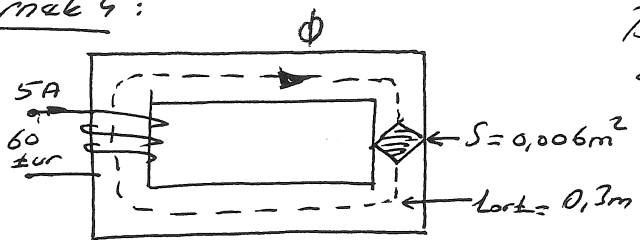
$$I = \frac{F}{N} = \frac{H.l_{ort}}{N} = \frac{80.1,5}{100} = 1,2\ A \text{ bulunur.}$$

Açıklamalar:

Manyetik devrelerde $\bar{B} = \mu.H$ dır. Buradan $\mu = \frac{B}{H}$ elde edilir. İşte $\frac{B}{H}$ B-H tablosundan bulunan değer. Manyetik devrenin μ (geçirgenlik) değerini verir. Yani manyetik devrelerde nüvenin doyuma girmesi sonucu ϕ nin geçmesi akımda olduğu gibi lineer olamaz. Bu durum manyetik devreleri elektrik devrelerinden ayıran önemli bir özelliktir.

Tüm çözümlerde kullanılan nüve cinsinin B-H eğrisinin bilinmesi gerekir.

Örnek 4:



Dökme demirden yapılmış manyetik devrenin akısını bulunuz.

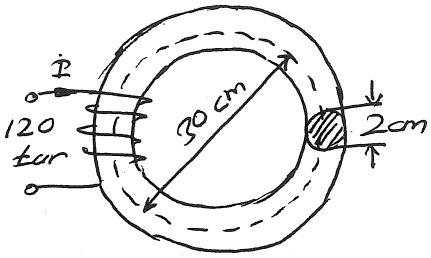
$L_{ort} \cdot H = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N I}{L_{ort}}$

$H = \frac{60 \cdot 5}{0,3} = 1000 \frac{A\text{-}S}{m}$ bulunur.

İlgili tablodan Dökme ~~Çelik~~ Demir için 1000 $\frac{A\text{-}S}{m}$ alan şiddetinin (mıknatıslanma kuvvetinin) karşılığı akı yoğunluğu $\bar{B} = 0,4 \frac{Wb}{m^2}$ bulunur.

$\phi = \oint_S B \cdot ds \Rightarrow \phi = 0,4 \cdot 0,006 = 2,4 \cdot 10^{-3}$ Wb bulunur.

Örnek 5: Dökme çelikten yapılmış nüvenin akısının $5 \cdot 10^4$ Maxwell olması düşünülüyor. Akımı bulunuz. {1 Maxwell = 10^{-8} Wb eder}



$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} m^2 = 3,14 cm^2$

$\bar{B} = \frac{\phi}{S} = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ Max.}}{3,14 cm^2} = 15,9 \cdot 10^3$ Gauss $= 1,59 \frac{Wb}{m^2}$

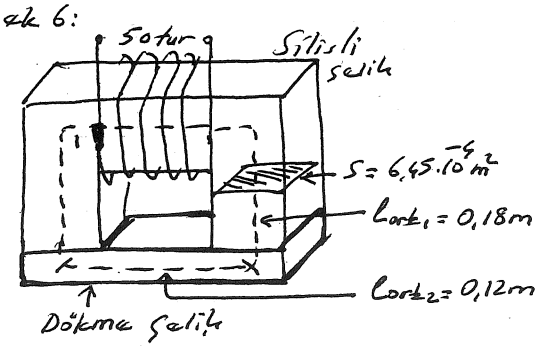
$1 \frac{Wb}{m^2} = 10^4$ Gauss

İlgili tablodan 1,59 $\frac{Wb}{m^2}$ için 4500 A·S/m'lik akım şiddeti değeri bulunur.

$L_{ort} = \pi \cdot (30 \cdot 10^{-2}) = 0,942 m$, $I = \frac{H \cdot L_{ort}}{N} = \frac{4500 \frac{A\text{-}S}{m} \cdot 0,942 m}{120} = 35,3$

$F = N \cdot I = 35,3 \cdot 120 = 4236$ A-S bulunur.

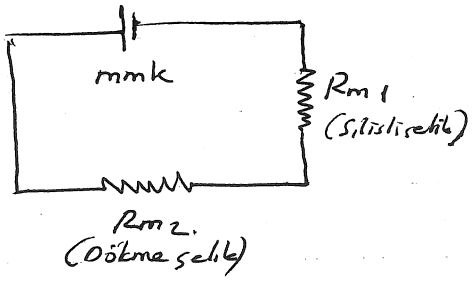
Örnek 6:



farklılıklı metalden oluşan devrenin akısının $3,5 \cdot 10^{-4}$ Wb olması için bobin akımını bulunuz.

$B = \frac{\phi}{S} = \frac{3,5 \cdot 10^{-4} Wb}{6,45 \cdot 10^{-4} m^2} = 0,543 \frac{Wb}{m^2}$ bulunur.

Not = Şekilde seri bir manyetik devre bulunuyor



İki farklı malzemenin H değerleri farklı farklı bulunur.

İlgili tablodan; Silisli çelik için $H_1 = 60$ A-S/m, Dökme çelik için $H_2 = 300$ A-S/m bulunur.

$F = H \cdot L_{ort} = (H_1 + H_2) \cdot L_{ort} = (60 + 300) \cdot (0,18 + 0,12) = 46,8$ A.S bulunur

veya

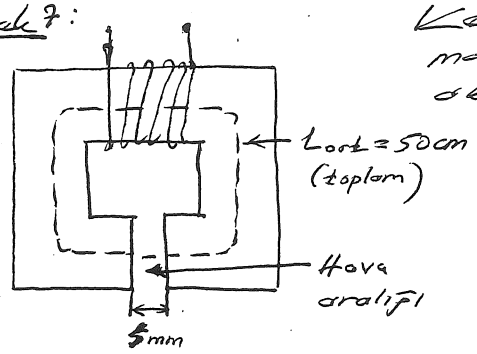
$F_1 = H_1 \cdot L_{ort1} = 60 \frac{A\text{-}S}{m} \cdot 0,18 = 10,8$ A-S

$F_2 = H_2 \cdot L_{ort2} = 300 \frac{A\text{-}S}{m} \cdot 0,12 = 36$ A-S

$F = F_1 + F_2 = 46,8$ A-S bulunur

$I = \frac{F}{N} = \frac{46,8}{50} = 0,936$ A olarak çıkar.

Örnek 7:



Kesiti $0,003\,m^2$ olan dökme çelik nüvenin manyetik akısı 2.10^{-3} Wb dir. 200 spirlik bobin akımını bulunuz.

Not: Hava aralıklarında kaçak akı bulunur. Ancak ihmal edilerek çözüm aranır.
Ayrıca, hava ve dökme çelik bir seri devreyi çağrıştırır.

$$\bar{B} = \frac{\phi}{S} = \frac{2.10^{-3}\,Wb}{0,003\,m^2} = 0,66\,\frac{Wb}{m^2}$$ bulunur.

İlgili tablodan $0,66\,\frac{Wb}{m^2}$ için $H = 440\,\frac{A.S}{m}$ bulunur.

a) Eğer, hava aralığı olmasaydı,

$$I = \frac{440.0,5}{200} = 1.1A$$ bulunurdu $\quad F = N.I = H.l_{ort}$

b) Hava aralığını dikkate alalım;

$\bar{B}$ her iki ortamda aynıdır. $\Rightarrow \bar{B} = \mu H_h \Rightarrow H_h = \frac{\bar{B}}{\mu} = \frac{0,66\,\frac{Wb}{m^2}}{4\pi.10^{-7}}$

$H_h = 525478\,\frac{A.S}{m}$ sıkar

$F_h = H_h.l_{ort}(h) = 525478\,\frac{A.S}{m}.(5.10^{-3}m) = 2102$ A-S bulunur ken

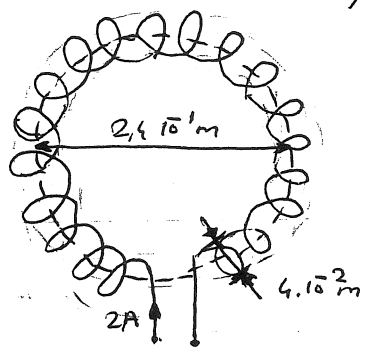
$F_ç = H_ç.l_{ort}(ç) = 440.(50-0,5)10^{-2} = 440.0,495$ 217,8 A-S bulunur.

$F = F_h + F_ç = 2102 + 217,8 = 2320$ A.S sıkar

$$I = \frac{F}{N} = \frac{2320}{200} = 11,6\,A$$ bulunur.

Sonuç: Hava boşluğundan dolayı akımı aşırı yükseltmiştir.

Örnek 8: 250 spirlik havaya sarılmış bobinin kaçak akısı ihmal ediliyor.



a) F'yi bulunuz.

$F = 250.2 = 500$ A-S

b) Relüktansı bulunuz.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi.(4.10^{-2})^2}{4} = 4\pi.10^{-4}\,m^2$$

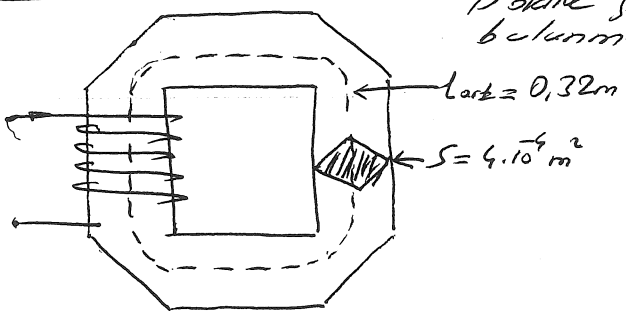
$$l_{ort} = \pi.d = \pi(2,4\,10^{-1}) = 0,753\,m$$

$$R_m = \frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \frac{0,753\,m}{(4\pi.10^{-7}).(1).(4\pi.10^{-4})\,m^2} = 4,77.10^8\,\frac{A.S}{Wb}$$ bulunur.

Not: Manyetik direnç (Relüktans) birimi H^{-1} dir. Sönkü, μ (manyetik geçirgenlik) $\frac{H}{m}$ olarak bilinmektedir.

$$R_m = \frac{m}{\frac{H}{m}.m^2} = \frac{1}{H} = \frac{A.S}{Wb}(H^{-1})$$ olur.

Örnek 9:



Dökme çelikten yapılmış 2000 spirlik bir bobini bulunmaktadır. 0,12A geçtiğini kabul ederek

a) $F = ?$

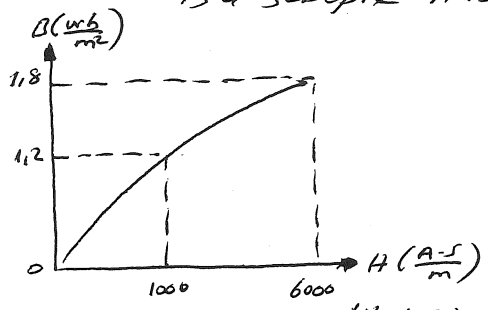
b) $H = ?$

a) $F = N.I = 2000 \cdot 0,12 = 240$ A-S

b) $H = \frac{F}{l_{ort}} = \frac{A-S}{m} = \frac{240 \text{ A-S}}{0,32 m} = 750 \frac{A-S}{m}$

c) Manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

Not: Manyetik direnç, man. akı yoğunluğuna bağımlı bir değişkendir. Bu sebeple hassasiyeti arttırmak için B/H tablosu kullanılmalıdır.



Dökme çelik için B/H tablosu

B-H tablosundan $750 \frac{A-S}{m}$ için $\bar{B}$ değeri $0,95 \frac{Wb}{m^2}$ bulunur.

d) Manyetik akıyı bulunuz.

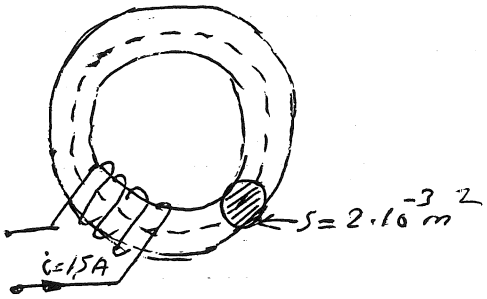
$\phi = \bar{B}.S = 0,95 . 4.10^{-4} = 38.10^{-5}$ Wb

Örnek 10 180 spirlik troid nüvenin malzeme geçirgenliği 950 olduğu biliniyor. Ort. boy 8.10^{-1}m için

a) Man. olan sıcaklıktaki,

b) Man. akıyı,

c) Man. akı yoğunluğunu bulunuz.



a) $H = \frac{F}{l_{ort}} = \frac{N.I}{l_{ort}} = \frac{270}{0,8} = 337,5 \frac{A.S}{m}$

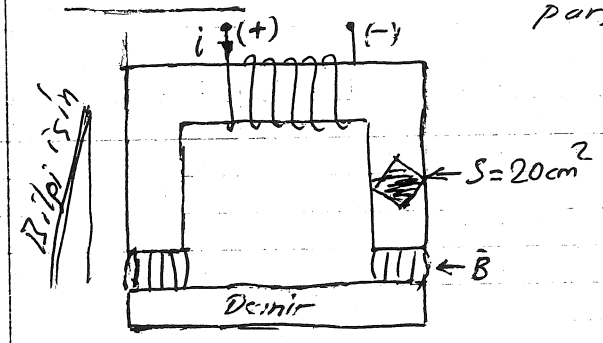
b) $\phi = \frac{\mu_0 \mu_r . N.I.S}{l_{ort}} = \frac{950.(4\pi.10^{-7}).270.2.10^{-3}}{0,8}$

$\phi = 80,5 . 10^{-5}$ Wb

d) $B = \frac{\phi}{S} = \frac{80,5.10^{-5} wb}{2.10^{-3} m^2} = 40,25 . 10^{-2} \frac{Wb}{m^2}$ bulunur.

$\phi = \frac{mmk}{R_m} = \frac{N.I}{\frac{l_{ort}}{\mu_0 \mu_r S}} = \frac{\mu_0 \mu_r . S . N . I}{l_{ort}}$ şeklinde olur.

Örnek 11: Hava aralığında 10.10^3 Gauss'luk akı yoğunluğu olduğuna göre demir parçasını çekecek kuvveti bulunuz.



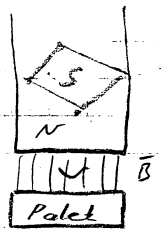
$\bar{F} = \frac{S.B^2}{\mu_0} = \frac{m^2 . \frac{Wb}{m^2}}{4\pi 10^{-7}} N$

$\bar{F} = \frac{20 10^{-4} m^2 . 1 \frac{Wb}{m^2}}{4\pi . 10^{-7}} = 1592N$ bulunur.

1 kp = 9,81N

$F = \frac{1592}{9,81} = 162$ kp olur.

açıklama arka sayfada



$\bar{F} = \bar{B} i l$ $\quad \{ F = N \cdot i = A \cdot T$

$\bar{F} = B\left(\frac{F}{N}\right)(l)$ $\quad \{ H = \frac{A \cdot T}{m}$

$\bar{F} = B\left(\frac{A \cdot T}{T}\right)\left(\frac{m^2}{m}\right) = \bar{B} \cdot \frac{H}{T} \cdot m^2$ $\quad \{$ Bir spirolden

$\bar{F} = B \cdot H \cdot S$ $\quad \{ H = \frac{B}{\mu} \Rightarrow B = \mu H$

$F = B \cdot \frac{B}{\mu} \cdot S = \frac{B^2 \cdot S}{4\pi 10^{-7}}$ Newton

$\{ 1\ kg = 9.81$ Newton

Örneğin Çözünü

$\bar{B} = 10 \cdot 10^3$ Gauss $= 1\ T$

$S = 20\ cm^2 = 20 \cdot 10^{-4}\ m^2$

$\bar{F} = \frac{1^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{4\pi\ 10^{-7}} = 1592{,}3\ N = 162{,}3\ kg$ bulunur.

Lorentz Kuvveti

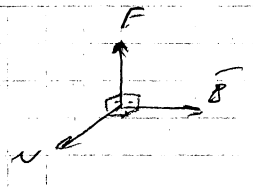
$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$ Olurdu. (Elektriksel alanda)

$W_{elk} = \bar{F} \cdot dl$ olurdu.

Eğer yükler hareketli ise manyetik alan oluşurdu..

Böylece $\bar{F} = \underbrace{\text{Elektriksel kuvvet}}_{\bar{F}_{elk}} + \underbrace{\text{Manyetik kuvvet}}_{\bar{F}_{man}}$ olur

$\bar{F} = q \cdot \bar{E} + q\,(v \times \bar{B})$ $\quad \{ v = \frac{m}{sn}$, $\bar{B} =$ Parla



$\bar{F}_{man} = q\,(v \times \vec{B})$

$\bar{F} = (i \cdot dt)\,(v \times \vec{B})$

$d\bar{F} = i\,dt\left(\frac{dl}{dt} \times B\right)$

$\bar{F} = i \int_0^L dl \times B \Rightarrow \bar{F} = I \cdot L \times B = I \cdot L\, B \cdot \sin\varphi = I \cdot L\, B \cdot \sin 90^\circ$

$\bar{F} = BIL$ Newton olur. $\quad \{$ Manyetik Momert $M = S \cdot I = A \cdot m^2$ dir.

$M = \underset{\text{Manyetik kütle}}{m} \cdot l = (A \times m) \cdot m$

veya

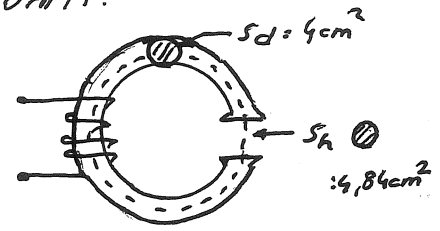
$\bar{F} = \mu \frac{m_1 \cdot m_2}{4\pi R^2} = \frac{H}{m} \frac{(\text{Amper} \times \text{metre})^2}{m^2} = \frac{\text{Henry Amper}^2}{\text{metre}}$

$m = l \cdot i =$ Amper metre

$\text{Henry} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{saniye}}{\text{Amper}} = \frac{\phi}{i} \Rightarrow \bar{F} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{saniye}}{\text{Amper}} \cdot \frac{\text{Amper}^2}{\text{metre}} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{saniye} \cdot \text{Amper}}{\text{metre}}$

$= \text{Joule} = \text{Newton}$

Örn 17:



Hava aralığı 2mm

1000 A-S'lık demir nüvenin ort. boyu 0,438 m'dir. Hava aralığı için ϕ değerini bulunuz.

Not: $B_d = 0{,}41 \frac{Wb}{m^2}$ alınacak.

$\phi_d = B_d \cdot S_d = 0{,}41 \cdot 4{,}84 = 1{,}98 \; 10^{-4}$ Wb

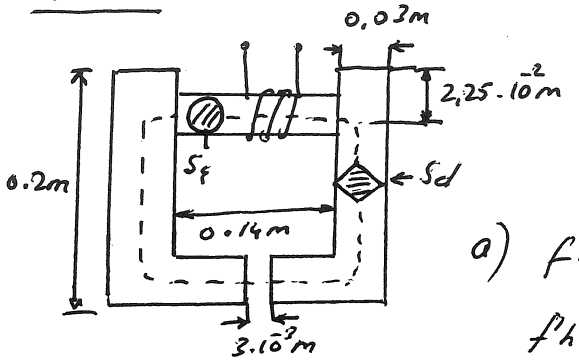
$0{,}41 \frac{W}{m^2}$ için tablodan $H_d = 1000 \frac{A\text{-}S}{m}$ bulunur.

$F_d = H_d \cdot l_{ort\,d} = 1000 \cdot 0{,}438 = 438$ A-S

$F_h = F - F_d = 1000 - 438 = 562$ A-S olarak hava aralığı için bulunur.

$$\phi_h = \frac{(H_h \cdot l_{ort\,h}) \cdot \mu_0 \cdot S_h}{l_{ort\,h}} = \frac{562 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}84 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}7 \text{ Wb bulunur.}$$

Örn 18:



1870 spirden oluşan bir bobin $3 \cdot 10^{-3}$ m saplı bir çelik nüveye sarılmıştır. Hava aralığında $4{,}43 \cdot 10^{-4}$ Wb'lik mon akı oluşabilmesi için

a) Bobin akımını bulunuz.

b) Eş-değer mon. devreyi hazırlayınız.

a) $$f_h = \frac{\phi \cdot l_{ort\,h}}{\mu \; S_h} = \frac{(4{,}43 \cdot 10^{-4})(3 \cdot 10^{-3})}{(4\pi \cdot 10^{-7})(9 \cdot 10^{-4})}$$

$f_h = 1175$ A-S

$S_ç = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-2})}{4} = 4{,}9 \cdot 10^{-4} \, m^2$ $\qquad \bar{B}_ç = \frac{\phi}{S_ç} = 0{,}9 \frac{Wb}{m^2}$

ilgili tablodan $H_ç = 700 \frac{A\text{-}S}{m}$ bulunur.

$f_ç = H_ç \cdot l_{ort\,ç} = 700 \cdot 0{,}14 = 98$ A-S

$S_d = (3 \cdot 10^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^{-2}) = 9 \cdot 10^{-4}$ m $\qquad B_d = \frac{\phi}{S_d} = 0{,}49 \frac{Wb}{m^2}$ } Seri devrede ϕ eşittir.

ilgili tablodan $H_d = 1520$ bulunur.

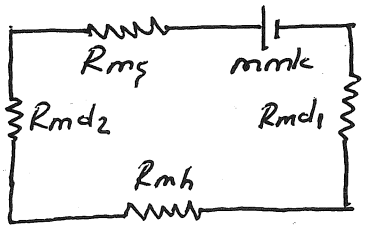
Demir nüvenin panel boyu (ort.) 0,5 m dir.

$F_d = H_d \cdot l_{ort\,d} = 1520 \cdot 0{,}5 = 760$ A-S bulunur.

$F = F_ç + F_d + F_h = 1175 + 98 + 760 = 2033$ A-S bulunur.

$I = \frac{F}{N} = \frac{2033}{1870} = 1{,}2$ A olarak hesaplanır.

b)



$$R_{mç} = \frac{mmk\,(F_ç)}{\phi} = \frac{98 \text{ A-S}}{4{,}43 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}} = 0{,}22 \; 10^{6} \; H^{-1}$$

$$R_{mh} = \frac{F_h}{\phi} = \frac{1175 \text{ A-S}}{4{,}43 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}} = 2{,}65 \; 10^{6} \; H^{-1}$$

$$R_{md} = \frac{F_d}{\phi} = \frac{760 \text{ A-S}}{4{,}43 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}} = 1{,}71 \; 10^{6} \; H^{-1}$$

$R_{md_1} = R_{md_2} = 1{,}71 \cdot 10^{6} / 2 = 0{,}855 \cdot 10^{6} \; H^{-1}$

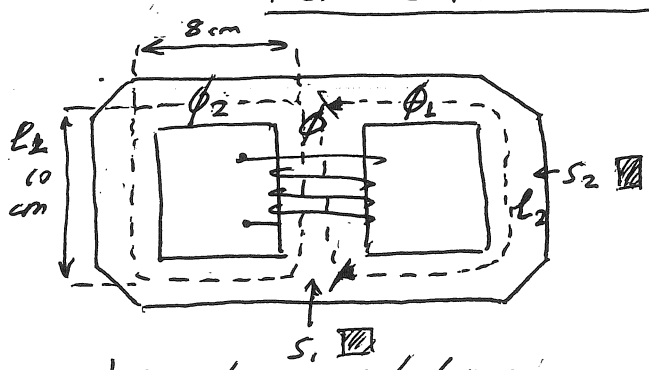
$R_m = (0{,}22 + 2{,}65 + 1{,}71) \, 10^{6} = 4{,}58 \cdot 10^{6} \; H^{-1}$

$F = R_m \cdot \phi = 4{,}58 \cdot 10^{6} \cdot 4{,}43 \cdot 10^{-4} = 2030$ A-S

$R_m = \frac{l}{\mu \cdot S}$

$\mu = \frac{B}{H}$

Örnek 19: Paralel Man. Devre



Şekildeki montel tip trafo nüvesinin,

$S_1 = 20 cm^2$

$S_2 = 12 cm^2$

$l_1 = 10 cm$, $l_2 = 26 cm$

$\phi = 15\ 10^{-4}$ Maxwell

Not : $1 Wb = 10^8$ Maxwell

a) F_1 değerini bulunuz.

$B_1 = \frac{\phi_1}{S_1} = \frac{(15.10^{-4}.10^{8})\ Wb}{20.10^{-4}\ m^2} = 0,75\ \frac{Wb}{m^2}$ | Orta bacak için

ilgili tabloda $0,75 \frac{Wb}{m^2}$ için $H_1 = 100 \frac{A-S}{m}$ bulunur. | Trafo sacına bakılmalı

$F_1 = H_1 . l_1 = 100 . 0.1 = \underline{10\ A.S}$

b) F_2 değerini bulunuz.

$\phi = \phi_1 + \phi_2$ dir. ($I = I_1 + I_2 + \dots$ gibi) K.A.Kanunu.

$\phi_2 = \phi_1$ (Kesitler eşit) $\phi_2 = \frac{\phi}{2} = \frac{15.10^{-4}.10^{8}}{2} = 7,5\ 10^{-4}\ Wb$

$B_2 = \frac{\phi_2}{S_2} = \frac{7,5\ 10^{-4}}{12.10^{-4}} = 0,625 \frac{Wb}{m^2}$ | Yan bacaklar için

ilgili tabloda $0,625 \frac{Wb}{m^2}$ için $H_2 : 85 \frac{A.S}{m}$ bulunur.

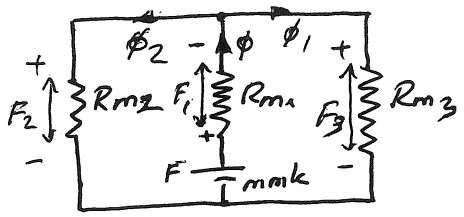
$F_2 = H_2 . l_2 = 85 . 0,26 = 22,1\ A.S \Rightarrow F_2 = F_3$ dür

c) Toplam F'yi bulunuz.

K.G.K $\boxed{F = F_1 + F_2} \Rightarrow F = 10 + 22,1 = 32,1\ A.S$ bulunur. (K.G.K'na göre)

Not: Orta bacağın ve yan bacaklardan birisinin F değerleri toplamları, toplam F'i verir. Çünkü kapalı bir devrede gerilimler toplamı K.G.K'na göre sıfırdır.

d) Eş-değer devreyi çiziniz



e) Orta bacak sargı akımı 1A ise tur sayısını bulunuz.

$F = N.I \Rightarrow N = \frac{F}{I} = 32,1$ tur bulunur.

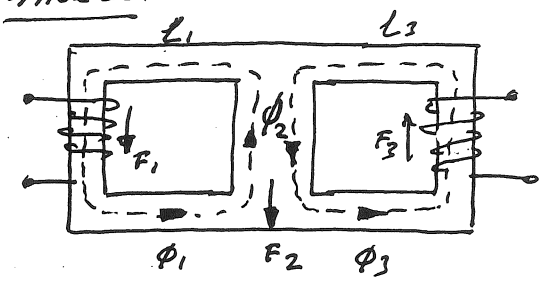
$R_{m1} = \frac{F_1}{\phi} = \frac{10\ A.S}{15\ 10^{-4}\ Wb} = 6667\ H^{-1}$

$R_{m3} = R_{m2} = \frac{F_2}{\phi_2} = \frac{F_3}{\phi_1} = \frac{22,1\ A.S}{7,5\ 10^{-4}\ Wb} = 29467\ H^{-1}$

$R_m = R_{m1} \rightarrow R_{m2} // R_{m3} = 6667 + \frac{29467}{2} = 21400\ H^{-1}$

$F = \phi . R_m = 15\ 10^{-4} . 21400 = 32,1\ A.S$

Örnek 20: Paralel Man. Devre

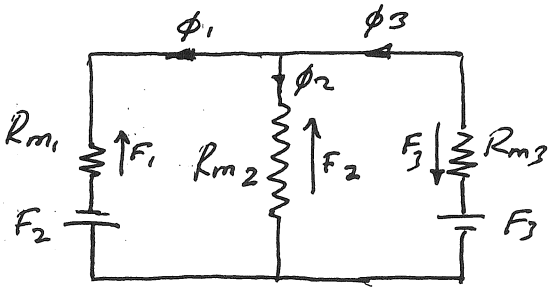


$l_1 = l_3 = 25\,cm$
$l_2(\text{ortalama}) = 5\,cm$ } Ortalama boylar
$\phi_1 = 90\,\mu Wb$
$\phi_3 = 120\,\mu Wb$

$N_1 = 50$ spir $\qquad N_2 = 50$ spir

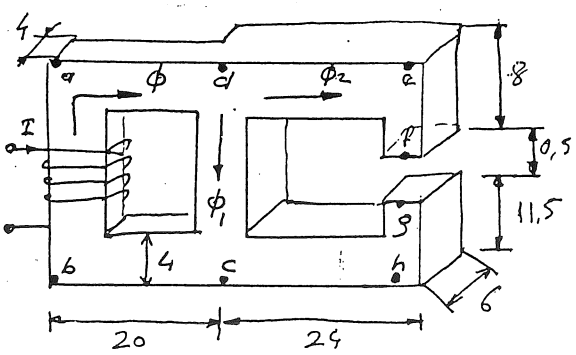
$\phi_2 = \phi_3 - \phi_1 = 0{,}3\,10^{-6}\,W$ bulunur. (K.A. Kuralına göre)

ϕ_2'nin yönü yukarıdan aşağıya doğru olur.



$F_1 = H_1 l_1$
$F_2 = H_2 l_2$
$F_3 = H_3 l_3$ olur.

Örnek 21: Karışık Man. Devre

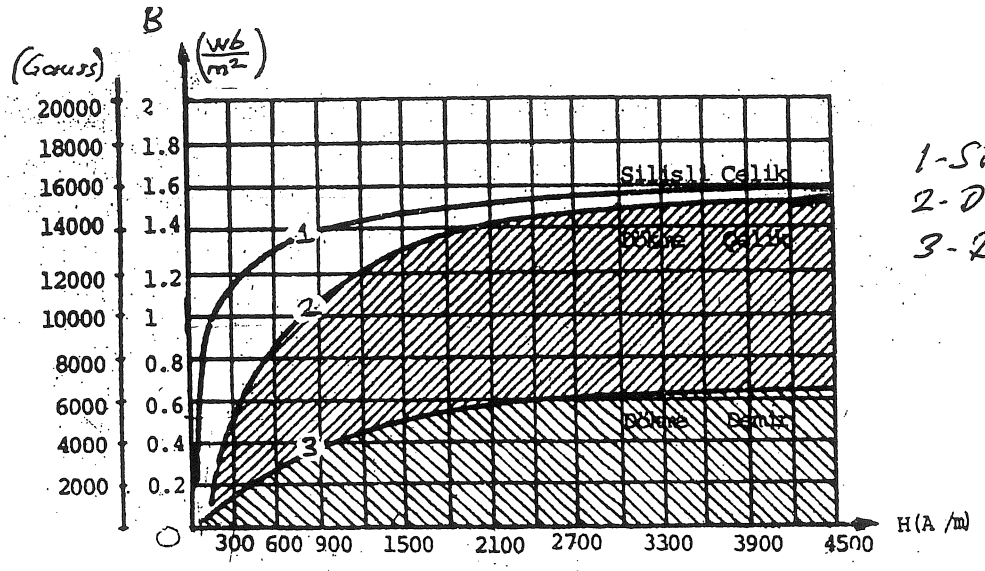


Seri-paralel manyetik devrede Hava aralığındaki yoğunluğu 0,05 Tesla ve manyetik bağıl geçirgenlik 500 H/m ise sargı akımını bulunuz.

{ değerler isim metre alınacak
kesitler sağ ve sol pencerelerde düzgün olarak verilmiş olup kare ve dikdörtgendir

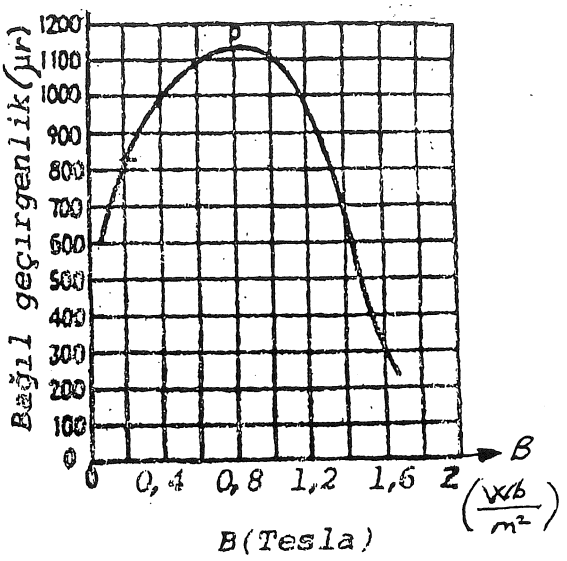
Kısım	Akı (mWb)	Alan (cm²)	B (T)	H (A.s/m)	l (cm)	mmk (AS)
fg	0,12	24	0,05	39788,74	0.5	198,94
def	0,12	24	0,05	79,58	28	22,28
c.h.g	0,12	24	0,05	79,58	31,5	25,07
					Toplam	mmk 246,29
dc	3,48	36	0,967	1539,21	16	246,29
ad	3,6	16	2,25	3580,99	18	644,58
ab	3,6	16	2,25	3580,99	16	572,96
bc	3,6	16	2,25	3580,99	18	644,58
					Toplam	mmk 2108,41

Sargı akımı $I = 2108{,}41 / 1000$
$= 2{,}108\,A$



1-Silisli Çelik
2-Dökme Çelik
3-Dökme Demir

Çeşitli ferromanyetik cisimlerin mıknatıslanma eğrileri. (B-H)



Dökme çeliğin geçirgenlik eğrisi.